

Existenz und Zahl
gewisser Divisoren auf algebraischen
Kurven

von
Gerhard Angermüller
aus Coburg

1976 № 64



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548424_0018

Existenz und Zahl
gewisser Divisoren auf algebraischen
Kurven

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von
Gerhard Angermüller
aus Coburg



Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen Fach-
bereichen der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 4. 2. 1976

Vorsitzender der Promotionskommission:	Professor Dr. H. Behrens
Erstberichterstatter:	Professor Dr. W.-D. Ceyer
Zweitberichterstatter:	Professor Dr. H.-J. Nastold

Vorwort

Bei der Untersuchung feinerer Eigenschaften von Divisoren und linearen Systemen auf algebraischen Kurven ist es oft vorteilhaft, Mannigfaltigkeiten von Divisoren oder Divisorklassen zu betrachten, wie z.B. die Mannigfaltigkeiten Div_n der positiven Divisoren vom Grad n oder die Jacobische Mannigfaltigkeit J einer Kurve. Eine besondere Rolle spielen dabei die (nach Wahl eines Punktes auf der Kurve) kanonischen Morphismen $f_n: \text{Div}_n \rightarrow J$, enthalten sie doch wichtige Informationen über Divisoren; als Beispiel dazu sei nur vermerkt, daß die Behauptung des Satzes von Riemann - Roch für eine algebraische Kurve äquivalent ist zu der folgenden :

Für jedes $n \geq 1$, jedes $x \in \text{Div}_n$ ist die von der Sequenz

$$F := f_n^{-1}\{f_n(x)\} \xrightarrow{i} \text{Div}_n \xrightarrow{f_n} J$$

induzierte Sequenz von Tangentialräumen und -abbildungen

$$T_{F,x} \xrightarrow{di} T_{\text{Div}_n,x} \xrightarrow{df_n} T_{J,f_n(x)}$$

exakt.

Dieses Beispiel zeigt, wie nützlich eine genaue Kenntnis der Morphismen $f_n: \text{Div}_n \rightarrow J$ für die Untersuchung von Divisoren und linearen Systemen auf einer algebraischen Kurve ist.

In dieser Arbeit bringen wir unter anderem weitere Beispiele für diesen Sachverhalt; wir berechnen die Chern - Klassen einiger Garben auf Div_n und wenden diese Kenntnis mit Hilfe der Morphismen $f_n: \text{Div}_n \rightarrow J$ auf zwei Fragenkreise an :

Einer davon handelt von Funktionen minimalen Grades auf algebraischen Kurven; genauer bringen wir einen einfachen Beweis des folgenden Satzes :

Für jede irreduzible komplette glatte Kurve vom Geschlecht g über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k gibt es einen Morphismus auf die projektive Gerade vom Grad $\leq \frac{g+3}{2}$.

Brill und Noether [2] haben 1874 gezeigt, daß dieser Satz für den Körper der komplexen Zahlen 'im allgemeinen' gilt; aufbauend auf ihren Ideen und unter wesentlicher Verwendung der Theorie der Teichmüller - Räume hat Meis [21] schließlich 1960 den Satz für den Fall $k = \mathbb{C}$ beweisen können, d.h. Meis hat gezeigt :

Jede zusammenhängende kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g läßt sich mit $\frac{g+3}{2}$ Blättern oder weniger konkretisieren.

Mit völlig anderen Methoden hat Martens [17] bewiesen, daß jede irreduzible komplette glatte Kurve vom Geschlecht g über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik $\neq 2$ Überlagerung der projektiven Geraden vom Grad $\leq [\frac{3}{4}g] + 1$ ist; Martens verwendet dabei als wichtigstes Hilfsmittel die Mannigfaltigkeiten Div_n der positiven Divisoren vom Grad n auf der Kurve.

Unter Verwendung von Martens' Ideen hat Gunning [8] 1972 den Satz von Meis ($k = \mathbb{C}$) auf eine neue Art bewiesen; ermöglicht wurde dieser Beweis durch die explizite Beschreibung des Ringes der ganzzahligen Homologie symmetrischer Produkte Riemannscher Flächen durch Erzeuger und Relationen (Macdonald [16]) .

Erst 1971 jedoch wurde der obige Satz bewiesen : Kleiman, Laksov [12] - mit wiederum anderen Methoden, nämlich unter Verwendung des Schubert - Kalküls für Graßmannsche Mannigfaltigkeiten; unabhängig davon hat Kempf [11] den Satz mit den gleichen Methoden bewiesen.

Schließlich haben 1973 Kleiman, Laksov [13] noch einen anderen Beweis des Satzes angegeben; dabei wird die 'Determinantenformel des Schubert - Kalküls' benutzt, mit deren Hilfe Singularitäten der Morphismen $f_n : \text{Div}_n \rightarrow J$ untersucht werden.

Wir beweisen hier den Satz folgendermaßen:

Man sieht leicht, daß die Behauptung des Satzes äquivalent ist zur Existenz positiver Divisoren vom Grad $\leq \frac{g+3}{2}$ und (projektiv) Dimension ≥ 1 . Ähnlich wie Gunning [8] im Fall $k = \mathbb{C}$ bemerken wir weiter, daß, wenn solche Divisoren vom Grad n nicht existieren, der Morphismus $f_n: \text{Div}_n \rightarrow J$ eine abgeschlossene Immersion ist. Dann ist aber die Chern - Klasse des dazugehörigen Normalenbündels das Inverse der Chern - Klasse von Div_n ; letztere können wir aber leicht berechnen und erhalten für $n \leq \frac{g+3}{2}$ auf einfache Weise einen Widerspruch.

In dem hier behandelten allgemeinen Fall haben wir jedoch im Unterschied zu Gunning [8] ($k = \mathbb{C}$) keine explizite Beschreibung des Chow - Ringes o.ä. zur Verfügung, was bei den von Gunning durchgeführten Rechnungen unerlässlich ist. Es stellt sich aber heraus, daß dies nicht notwendig ist; weiter brauchen wir keine so komplizierten Rechnungen wie in [8]. Darüberhinaus machen wir auch keinen Gebrauch von den von Kempf, Kleiman und Laksov in [11], [12] bzw. [13] benötigten tieferliegenden Hilfsmitteln.

Es sei noch bemerkt, daß wir Chern - Klassen in einer im Zusammenhang mit Einbettungsfragen typischen Weise verwendet haben: Mit dem gleichen Vorgehen kann man z.B. sehen, daß sich keine Abelsche Mannigfaltigkeit der Dimension d in den projektiven Raum $\mathbb{P}_{2d-1}$ der Dimension $2d-1$ einbetten läßt; darüberhinaus hat van de Ven durch eine subtilere Verwendung von Chern-Klassen gezeigt, daß sich keine Abelsche Mannigfaltigkeit der Dimension $d \geq 3$ in den projektiven Raum $\mathbb{P}_{2d}$ einbetten läßt (wie jede glatte projektive Mannigfaltigkeit kann sie natürlich in den projektiven Raum $\mathbb{P}_{2d+1}$ eingebettet werden). Weiter hat Holme mit Hilfe von Chern-Klassen eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür

gefunden, daß sich eine in einem $\mathbb{P}_N$ eingebettete glatte Mannigfaltigkeit durch eine Projektion in einen $\mathbb{P}_n$ mit $n < N$ einbetten läßt.

Der zweite Fragenkreis, den wir mit Hilfe von Chernklassen gewisser Garben auf den Divisormannigfaltigkeiten Div_n und der Morphismen $f_n: \text{Div}_n \rightarrow J$ untersuchen wollen, entstammt der Abzählenden Geometrie algebraischer Kurven: unter gewissen Bedingungen gibt es nämlich nur endlich viele Divisoren von einem bestimmten Typ, die endlich vielen vorgegebenen linearen bzw. algebraischen Systemen gemeinsam sind; die Formeln von de Jonquières, Schubert etc. geben dann ihre Zahl an. Z.B. enthält ein lineares System vom Grad n und der Dimension r auf einer Kurve vom Geschlecht g i.a. $(r+1)(n+rg-r)$ Divisoren vom Grad n und Typ $(r+1).P + D$, wobei P ein Primdivisor und D ein positiver Divisor vom Grad $n-(r+1)$ ist (Formel von Brill-Segre).

Solche Formeln bildeten um die Jahrhundertwende einen Gegenstand ausführlicher Untersuchungen (vgl. hierzu und zu weiteren Literaturangaben Severis Vorlesungen über Algebraische Geometrie [25], i.e. S. 189 - 192); häufig beschränkte man sich dabei auf die Angabe von Rekursionsformeln oder auf die Behandlung von Spezialfällen. Macdonald [15] hat 1958 eine geschlossene Formel für die Anzahl (falls diese endlich ist) der in endlich vielen vorgegebenen linearen Systemen enthaltenen Divisoren von einem bestimmten Typ angegeben und diese im Fall $\text{char } k = 0$ durch langwierige Rechnungen mit den klassischen Methoden der Abzählenden Geometrie bewiesen. Mit Hilfe der von ihm 1962 [16] erhaltenen expliziten Beschreibung des Ringes der ganzzahligen Homologie symmetrischer Produkte Riemannscher Flächen durch Erzeuger und Relationen konnte Macdonald einfache (und natürliche) Beweise der obengenannten For-

meln im Fall $k = \mathbb{C}$ angeben: er ordnete auf natürliche Weise jedem linearen System L auf einer kompletten glatten Kurve C einen Zykel auf dem n -fachen symmetrischen Produkt von C zu, der die in L enthaltenen positiven Divisoren vom Grad n beschreibt und bewies die obengenannten Formeln durch Betrachtung der Schnittvielfachheiten solcher Zyklen. Diese Idee wurde von Mattuck [20] aufgegriffen; unter Benutzung der von Schwarzenberger in [24] eingeführten Sekantenbündel und einer Beschreibung der Mannigfaltigkeiten Div_n als Mannigfaltigkeiten über der Jacobischen erhielt er einen algebraischen Beweis der Formel von de Jonquières für komplette glatte Kurven über Körpern beliebiger Charakteristik. Die bei der Berechnung gewisser Schnittvielfachheiten von Macdonald benötigte Beschreibung des Ringes der ganzzahligen Homologie symmetrischer Produkte Riemannscher Flächen durch Erzeuger und Relationen ersetzte Mattuck mit Hilfe der Morphismen $f_n: \text{Div}_n \rightarrow J$ durch die Berechnung von Schnittvielfachheiten gewisser Zyklen auf der Jacobischen J der Kurve. Im zweiten Teil dieser Arbeit vereinfachen wir den von Mattuck in [20] gemachten Ansatz und beweisen darüberhinaus neben der Formel von de Jonquieres weitere wichtige Formeln der Abzählenden Geometrie über lineare und algebraische Systeme auf Kurven über algebraisch abgeschlossenen Körpern beliebiger Charakteristik; die hier bewiesenen Formeln umfassen insbesondere alle von Macdonald in [16] für den Körper der komplexen Zahlen bewiesenen Formeln der Abzählenden Geometrie auf algebraischen Kurven.

Inhalt :

Terminologie und Notation

Leitfaden

§ 1	Die Divisormannigfaltigkeiten Div_n	1
§ 2	Die Chernklassen der Divisormannigfaltigkeiten Div_n	7
§ 3	Funktionen minimalen Grades auf algebraischen Kurven	13
§ 4	Eine geometrische Interpretation der Chern - Klassen	18
§ 5	Divisormannigfaltigkeiten und lineare Systeme	22
§ 6	Abzählende Geometrie linearer und algebraischer Systeme auf algebraischen Kurven	38

Literatur

Terminologie und Notation :

In den Standardbezeichnungen richten wir uns nach [3] - [7] bzw. [14], bis auf folgende Ausnahme : T_X bezeichnet die Tangentialgarbe einer Mannigfaltigkeit X .

Auf folgendes weisen wir besonders hin :

Mit $A(X) = \bigoplus_n A_n(X)$ bezeichnen wir den (durch Codimension) graduierten Ring algebraischer Zyklen modulo rationaler Äquivalenz einer quasiprojektiven Mannigfaltigkeit X ; weiter bezeichnet $\equiv$ numerische Äquivalenz in $A(X)$.

Ist $f:X \rightarrow Y$ ein (eigentlicher) Morphismus algebraischer Mannigfaltigkeiten, so bezeichnen

$$f^*:A(Y) \rightarrow A(X) \quad (f_*:A(X) \rightarrow A(Y))$$

die von f induzierten Abbildungen.

Für ganze Zahlen n, m ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{m}$ definiert durch $(1+X)^n = \sum_{m \geq 0} \binom{n}{m} X^m$; insbesondere gilt für alle ganzen Zahlen n, m :

$$\binom{-n}{m} = (-1)^m \binom{n+m-1}{m} .$$

Im folgenden bezeichnet k stets einen algebraisch abgeschlossenen Körper, C eine reduzierte irreduzible komplette glatte algebraische Kurve vom Geschlecht g über k und c einen k -rationalen Punkt von C .

Leitfaden

Im § 1 bringen wir die Betrachtungsweise, die wir im Hinblick auf die Mannigfaltigkeiten Div_n der positiven Divisoren vom Grad n bevorzugt einnehmen werden: es gibt nämlich eine kohärente Garbe $\mathcal{I}_n$ auf der Jacobischen J , deren Projektivierung $\mathbb{P}(\mathcal{I}_n)$ über J isomorph ist zu Div_n (Grothendieck [6]).

Diese Betrachtungsweise ermöglicht uns im § 2 eine einfache Berechnung der Chernklassen von Div_n und liefert damit das wichtigste Hilfsmittel, den im Vorwort genannten Satz über Funktionen minimalen Grades auf algebraischen Kurven zu beweisen (§ 3).

Im § 4 geben wir eine einfache geometrische Interpretation der Chernklassen $c_i(E)$ eines Vektorbündels E vom Rang n :

$c_{n-j}(E)$ beschreibt den Ort, wo $j+1$ linear unabhängige globale Schnitte von E linear abhängig werden (Mattuck [20]).

Diese Interpretation ermöglicht es, im § 5 für jedes lineare System L auf einer Kurve die Klasse eines Zyklus modulo rationaler Äquivalenz zu berechnen, dessen Träger gerade aus den in L enthaltenen Divisoren vom Grad n besteht.

Damit können wir im letzten Paragraphen Sätze von de Jonquières, Schubert etc. aus der Abzählenden Geometrie von Kurven durch einfache Rechnungen beweisen.

§ 1 Die Divisormannigfaltigkeiten Div_n

Es sei $J = \text{Pic}_C^0|_k$ die Jacobische Mannigfaltigkeit der Kurve C ,
 $p: C \times J \rightarrow J$ bzw. $q: C \times J \rightarrow C$ die kanonischen Projektionen und $\mathcal{P}$
eine Poincaré - Garbe auf $C \times J$ mit $p_*(\mathcal{P}|_q^{-1}(c)) = \mathcal{O}_J$.
 $(J, \mathcal{P})$ parametrisiert die invertierbaren $\mathcal{O}_C$ - Garben vom Grad 0,
nämlich:

Durch
$$x \mapsto q_*(\mathcal{P}|_p^{-1}(x))$$

wird eine Bijektion von der Menge der k -rationalen Punkte von J
auf die Menge der Isomorphieklassen invertierbarer $\mathcal{O}_C$ - Garben
vom Grad 0 definiert.

Sei
$$\mathcal{P}_n := \mathcal{P} \otimes q^* \mathcal{O}_C(n.c) \quad ;$$

$(J, \mathcal{P}_n)$ parametrisiert in diesem Sinne offensichtlich die inver-
tierbaren $\mathcal{O}_C$ - Garben vom Grad n .

J ist glatt und irreduzibel von der Dimension g (vgl. [6],
236, 2.10).

Sei $\text{Div}_{C/k}$ das offene Teilschema des Hilbertschemas $\text{Hilb}_{C/k}$,
das die effektiven Cartier - Divisoren auf C parametrisiert
(vgl. [6], 232 (4), 4.1). $\text{Div}_{C/k}$ zerfällt in irreduzible
Komponenten Div_n der Dimension n ; Div_n ist glatt und para-
metrisiert die positiven Divisoren vom Grad n auf C .

Für jede nicht negative ganze Zahl n sei

$$f_n : \text{Div}_n \rightarrow J$$

der durch
$$D \mapsto (D-n.c)$$

und
$$i_n : \text{Div}_n \rightarrow \text{Div}_{n+1}$$

der durch
$$D \mapsto D + 1.c$$

definierte Morphismus.

Offenbar ist dann das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Div}_n & \xrightarrow{i_n} & \text{Div}_{n+1} \\ f_n \searrow & & \swarrow f_{n+1} \\ & J & \end{array}$$

kommutativ.

Für jede nicht negative ganze Zahl n ist Div_n isomorph zum n -fachen symmetrischen Produkt der Kurve C (vgl. [5] (6), S. 27).

Eine andere nützliche Beschreibung der Divisormannigfaltigkeiten Div_n enthält der

Satz 1

Sei $p: C \times J \rightarrow J$ die Projektion von $C \times J$ auf J .

Für jede nicht negative ganze Zahl n gibt es einen kohärenten

$\mathcal{O}_J$ -Modul $\mathcal{L}_n$ und einen Isomorphismus von Funktoren

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_J}(\mathcal{L}_n, \cdot) \cong p_*(\mathcal{P}_n \otimes \cdot)$$

quasikohärenter $\mathcal{O}_J$ -Moduln; dadurch ist $\mathcal{L}_n$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und hat die folgenden Eigenschaften:

- (1) Es gibt einen Isomorphismus $g_n: \mathbb{R}(\mathcal{L}_n) \xrightarrow{\sim} \text{Div}_n$ über J , d.h. ist $k_n: \mathbb{R}(\mathcal{L}_n) \rightarrow J$ der kanonische Morphismus, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}(\mathcal{L}_n) & \xrightarrow{g_n} & \text{Div}_n \\ k_n \searrow & & \swarrow f_n \\ & J & \end{array}$$

kommutativ.

- (2) Es gibt einen Epimorphismus $e_n: \mathcal{L}_{n+1} \rightarrow \mathcal{L}_n$, derart, daß

das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}(\mathfrak{A}_n) & \xrightarrow{\xi_n} & \text{Div}_n \\ \mathbb{R}(e_n) \downarrow & & \downarrow i_n \\ \mathbb{R}(\mathfrak{A}_{n+1}) & \xrightarrow[\xi_{n+1}]{} & \text{Div}_{n+1} \end{array}$$

kommutativ ist; darüberhinaus ist das Bild der abgeschlossenen Immersion $\mathbb{R}(e_n)$ das durch das Ideal $\mathcal{O}_{\mathbb{R}(\mathfrak{A}_{n+1})}(-1)$ von $\mathbb{R}(\mathfrak{A}_{n+1})$ definierte Teilschema von $\mathbb{R}(\mathfrak{A}_{n+1})$.

Insbesondere ist also $i_n : \text{Div}_n \rightarrow \text{Div}_{n+1}$ eine abgeschlossene Immersion.

- (3) Für $n \geq 2g-1$ ist $p_*(\mathcal{P}_n)$ eine lokal freie Garbe vom Rang $n+1-g$ und $\mathfrak{A}_n = p_*(\mathcal{P}_n)^\vee$.

Beweis:

Existenz und Eindeutigkeit eines solchen $\mathcal{O}_J$ -Moduls $\mathfrak{A}_n$ werden in [3], III, 7.7.6 gezeigt.

Die Behauptung (1) ergibt sich deshalb aus dem folgenden Lemma, angewendet auf $X = C \times J$, $S = J$, $f = p : C \times J \rightarrow J$, $\mathcal{L} = \mathcal{P}_n$ und $\mathcal{Q} = \mathfrak{A}_n$.

Lemma 1

Sei S ein lokal noethersches Schema, $f: X \rightarrow S$ ein eigentlicher flacher Morphismus mit geometrisch integren Fasern und $\mathcal{L}$ ein invertierbarer $\mathcal{O}_X$ -Modul. Weiter sei $\mathcal{Q}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_S$ -Modul mit einem Isomorphismus von Funktoren

$$\text{Hom}_S(\mathcal{Q}, \cdot) \rightarrow f_*(\mathcal{L} \otimes \cdot)$$

quasikohärenter $\mathcal{O}_S$ - Moduln.

Für jeden Morphismus $S' \rightarrow S$ bezeichne $T(S')$ die Menge aller relativen effektiven Cartier - Divisoren D auf $X_S S' / S'$, derart, daß $\mathcal{O}(D)$ und $\mathcal{L}_{\mathcal{O}_S} \otimes \mathcal{O}_S$, das gleiche Element in $\text{Pic}(X_S S' / S')$ definieren.

Dann repräsentiert $\mathbb{H}(\mathcal{Q})$ den Funktor $T : \text{Sch}/S \rightarrow \text{Ens}$.

Den Beweis dieses Hilfssatzes entnimmt man [6], 232, S. 10 - 11.

Beweis von (2) :

Aus der exakten Sequenz von $\mathcal{O}_C$ - Moduln

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(n.c) \rightarrow \mathcal{O}_C((n+1).c) \rightarrow \mathcal{O}_{C,c} \rightarrow 0$$

erhält man eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_{C \times J}$ - Moduln

$$0 \rightarrow \mathcal{P} \otimes_q^* \mathcal{O}_C(n.c) \rightarrow \mathcal{P} \otimes_q^* \mathcal{O}_C((n+1).c) \rightarrow \mathcal{P} \otimes_q^* \mathcal{O}_{C,c} \rightarrow 0$$

und damit eine exakte Sequenz von Funktoren

$$0 \rightarrow p_*(\mathcal{P}_n \otimes .) \rightarrow p_*(\mathcal{P}_{n+1} \otimes .) \rightarrow p_*(\mathcal{P} \otimes_q^* \mathcal{O}_{C,c} \otimes .)$$

quasikohärenter $\mathcal{O}_J$ - Moduln.

Wegen der Wahl der Poincaré - Garbe $\mathcal{P}$ gilt :

$$p_*(\mathcal{P} \otimes_q^* \mathcal{O}_{C,c} \otimes .) \cong \text{Id} ;$$

nach Wahl von $\mathcal{K}_n$ erhält man somit eine exakte Sequenz von Funktoren

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_J}(\mathcal{K}_n, .) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_J}(\mathcal{K}_{n+1}, .) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_J}(\mathcal{O}_J, .)$$

Da die hier auftretenden $\mathcal{O}_J$ - Moduln kohärent sind, wird diese Sequenz induziert von einer Sequenz von $\mathcal{O}_J$ - Moduln :

$$\mathcal{O}_J \xrightarrow{l_n} \mathcal{A}_{n+1} \xrightarrow{e_n} \mathcal{A}_n \rightarrow 0.$$

$\mathbb{R}(e_n)$ ist eine abgeschlossene Immersion ([4], I, 9.7.9); die Kommutativität des angegebenen Diagramms ergibt sich sofort aus der Konstruktion von e_n .

Mit Hilfe von l_n erhält man die folgende Faktorisierung des kanonischen Homomorphismus $h_n: \mathcal{O}_{\mathbb{R}(\mathcal{A}_{n+1})} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{R}(\mathcal{A}_{n+1})}^{(1)}$:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{R}(\mathcal{A}_{n+1})} = k_{n+1}^* \mathcal{O}_J \rightarrow k_{n+1}^* \mathcal{A}_{n+1} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{R}(\mathcal{A}_{n+1})}^{(1)}.$$

Das Bild von $\mathbb{R}(e_n)$ wird definiert durch das dem Kern von e_n zugeordnete Ideal von $\mathcal{O}_{\mathbb{R}(\mathcal{A}_{n+1})}$, also durch das Nullstellenschema des Schnittes $h_n(1)$, d.h. durch das Ideal $\mathcal{O}_{\mathbb{R}(\mathcal{A}_{n+1})}^{(-1)}$.

Beweis von (3):

Wegen $n \geq 2g-1$ gilt nach dem Satz von Riemann - Roch für jede invertierbare Garbe $\mathcal{F}$ vom Grad n auf C :

$$\dim_k H^0(C, \mathcal{F}) = n+1-g$$

$$\text{und} \quad H^1(C, \mathcal{F}) = 0.$$

Deshalb gilt für jeden k -rationalen Punkt x von J :

$$\dim_k H^0(p^{-1}(x), \mathcal{P}_n \otimes k(x)) = n+1-g$$

$$\text{und} \quad H^1(p^{-1}(x), \mathcal{P}_n \otimes k(x)) = 0;$$

also ist $p_*(\mathcal{P}_n)$ lokal frei vom Rang $n+1-g$ ([3], III, 7.7)

und $R^1 p_*(\mathcal{P}_n) = 0$ ([3], III, 4.6.1).

Also ist der Funktor $p_*(\mathcal{P}_n \otimes .)$ quasikohärenter $\mathcal{O}_J$ -Moduln (rechts-)exakt; nach [3], III, 7.7.5 folgt deshalb die Isomorphie der Funktoren

$$p_*(\mathcal{P}_n \otimes .) = p_*(\mathcal{P}_n) \otimes .$$

quasikohärenter $\mathcal{O}_J$ -Moduln.

Wegen der Isomorphien

$$\begin{aligned} \text{Hom } \mathcal{O}_J (p_*(\mathcal{P}_n)^\vee, \dots) &\cong p_*(\mathcal{P}_n)^{\vee\vee} \otimes \dots \quad (\text{lokal frei!}) \\ &\cong p_*(\mathcal{P}_n) \otimes \dots \quad (\text{lokal frei!}) \end{aligned}$$

von Funktoren quasikohärenter $\mathcal{O}_J$ - Moduln erhält man damit aus der kennzeichnenden Eigenschaft von $\mathfrak{L}_n$ schließlich

$$\mathfrak{L}_n \cong p_*(\mathcal{P}_n)^\vee.$$

Bemerkung 1

Schwarzenberger [23] hat auf andere Weise eine Beschreibung der Divisormannigfaltigkeiten Div_n in der Form $\mathbb{R}(\mathcal{E})$ mit einem kohärenten $\mathcal{O}_J$ - Modul $\mathcal{E}$ erhalten.

Bemerkung 2

Im folgenden werden wir $\mathbb{R}(\mathfrak{L}_n)$ mit Div_n vermöge g_n identifizieren; nach Satz 1 wird dabei k_n mit f_n und $\mathbb{R}(e_n)$ mit i_n identifiziert.

§ 2 Die Chernklassen der Divisormannigfaltigkeiten Div_n

Grundlage für die Berechnung der Chernklassen der Mannigfaltigkeiten Div_n ist Satz 1 und das folgende

Lemma 2

Es sei X eine quasiprojektive glatte Mannigfaltigkeit, $\mathcal{E}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$ -Modul vom Rang $r \geq 1$. Ist dann

$$f : \mathbb{R}(\mathcal{E}) \rightarrow X$$

der kanonische Morphismus und

$$\varphi := c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{R}(\mathcal{E})}(1))$$

die Fundamentalklasse in $A_1(\mathbb{R}(\mathcal{E}))$, so gilt :

$$(1) \ c(\check{\mathcal{E}}) = \left(\sum_{i \geq r} f_* (\varphi^{i-1}) \right)^{-1}$$

(2) Hat X triviales Tangentialbündel, so gilt darüberhinaus :

$$c(\mathbb{R}(\mathcal{E})) = \left(\sum_{i \geq r} (1 + \varphi)^{-1} f^* f_* (\varphi^{i-1}) \right)^{-1}$$

Beweis von (1) :

$$\begin{aligned} c(\check{\mathcal{E}}) &= \left(\sum_{i \geq r} f_* (\varphi^{i-1}) \right) \\ &= \left(\sum_{j \geq 0} (-1)^j c_j(\mathcal{E}) \right) \left(\sum_{i \geq 0} f_* (\varphi^{i+r-1}) \right) \\ &= \sum_{i \geq 0} \sum_{0 \leq j \leq i} (-1)^j c_j(\mathcal{E}) f_* (\varphi^{i-j+r-1}) \end{aligned}$$

Für $i = 0$ erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq j \leq i} (-1)^j c_j(\mathcal{E}) f_* (\varphi^{i-j+r-1}) \\ &= f_* (\varphi^{r-1}) \\ &= 1 \quad ([7], \text{ S. } 13) \end{aligned}$$

und für $i \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq j \leq i} (-1)^j c_j(\mathcal{E}) f_* (\varphi^{i-j+r-1}) \\ &= \sum_{0 \leq j \leq i} (-1)^j f_* (f^*(c_j(\mathcal{E})) \varphi^{i-j+r-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= f_{\star}(\varphi^{i-1} \sum_{0 \leq j \leq i} (-1)^j f^{\star}(c_j(\mathcal{E})) \varphi^{r-j}) \\
 &= f_{\star}(\varphi^{i-1} 0) \quad (\text{Definition der } c_j(\mathcal{E})) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Also gilt : $c(\check{\mathcal{E}})(\sum_{i \geq r} f_{\star}(\varphi^{i-1})) = 1$,
und das ist die Behauptung (1) .

Beweis der Behauptung (2) :

Aus dem kanonischen Epimorphismus von $\mathcal{O}_{\mathbb{R}(\mathcal{E})}$ - Moduln

$$f^{\star} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{R}(\mathcal{E})}(1) \rightarrow 0$$

erhält man durch Dualisieren

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{R}(\mathcal{E})}(-1) \rightarrow f^{\star} \check{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0$$

mit dem Cokern $\mathcal{E}$. Nach Tensorieren mit $\mathcal{O}_{\mathbb{R}(\mathcal{E})}(1)$ erhält man daraus :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{R}(\mathcal{E})} \rightarrow f^{\star} \check{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{R}(\mathcal{E})}(1) \rightarrow \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{R}(\mathcal{E})}(1) \rightarrow 0$$

Da aber $\mathcal{E}$ lokal frei ist, besteht eine exakte Sequenz (vgl. [9] , § 13) :

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{R}(\mathcal{E})}(1) \rightarrow T_{\mathbb{R}(\mathcal{E})} \rightarrow f^{\star} T_X \rightarrow 0$$

Nach Voraussetzung ist T_X trivial, also auch $f^{\star} T_X$; deshalb erhält man mit Hilfe der letzten beiden Sequenzen :

$$\begin{aligned}
 c(\mathbb{R}(\mathcal{E})) &= c(T_{\mathbb{R}(\mathcal{E})}) \\
 &= c(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{R}(\mathcal{E})}(1)) \\
 &= c(f^{\star} \check{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{R}(\mathcal{E})}(1))
 \end{aligned}$$

Nun gilt aber :

$$c(\mathcal{O}_{\mathbb{R}(\mathcal{E})}(1)) = 1 + \varphi$$

und nach (1) :

$$c(f^{\star} \check{\mathcal{E}}) = (\sum_{i \geq r} f^{\star} f_{\star}(\varphi^{i-1}))^{-1} ;$$

nach der Formel für die Chernklasse eines Tensorproduktes erhält man deshalb :

$$\begin{aligned} c(\mathbb{R}(\mathcal{E})) &= (1+\varphi)^r \left(\sum_{i \geq 0} (1+\varphi)^{-i} f^* f_*(\varphi^{i+r-1}) \right)^{-1} \\ &= \left(\sum_{i \geq r} (1+\varphi)^{-i} f^* f_*(\varphi^{i-1}) \right)^{-1}, \end{aligned}$$

wie behauptet.

Im folgenden bezeichnen für jede nicht negative ganze Zahl n

$$f_n : \text{Div}_n = \mathbb{R}(\mathcal{L}_n) \rightarrow J$$

und
$$i_n : \text{Div}_n \rightarrow \text{Div}_{n+1}$$

die gleichen Abbildungen wie in § 1 ; weiter sei

$$\varphi_n := c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{R}(\mathcal{L}_n)}(1))$$

die Fundamentalklasse im Chowring $A(\text{Div}_n)$ und

$$\mu_n := \begin{cases} f_{(g-n)*}(1) & \text{falls } n \leq g \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann gilt für alle nicht negativen ganzen Zahlen n, m :

$$R_0 : \mu_n \in A_n(J)$$

$$R_1 : i_n^*(\varphi_{n+1}) = \varphi_n$$

$$R_2 : i_n^*(\varphi_n^m) = \varphi_{n+1}^{m+1}$$

$$R_3 : f_n^*(\varphi_n^m) = \mu_{g-n+m}$$

$$R_4 : \deg(\mu_n \mu_{g-n}) = \binom{g}{n}$$

Beweis:

R_0 ist klar .

R_1 : Nach Definition von $i_n = \mathbb{R}(e_n)$ gilt :

$$i_n^*(\mathcal{O}_{\mathbb{R}(\mathcal{L}_{n+1})}(1)) = \mathcal{O}_{\mathbb{R}(\mathcal{L}_n)}(1)$$

und deshalb :

$$i_n^* (\varphi_{n+1}) = \varphi_n \quad .$$

R_2 : Für $m = 0$ gilt :

$i_{n*}(\varphi_n^m) = i_{n*}(1) = \varphi_{n+1} = \varphi_{n+1}^{m+1}$,
 denn $i_{n*}(1)$ ist das dem Divisor $i_n(\text{Div}_n)$ von Div_{n+1}
 zugeordnete Element des Chowrings $A(\text{Div}_{n+1})$; nach
 Satz 1 (2) ist aber $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(\text{Div}_{n+1})}(1)$ das Geradenbündel des
 Divisors $i_n(\text{Div}_n)$.

Damit erhält man die Behauptung durch vollständige Induk-
 tion nach m :

Sei $i_{n*}(\varphi_n^m) = \varphi_{n+1}^{m+1}$. Dann gilt nach R_1
 und der Projektionsformel :

$$\begin{aligned} i_{n*}(\varphi_n^{m+1}) &= i_{n*}(1 \cdot i_n^*(\varphi_{n+1}^{m+1})) \\ &= i_{n*}(1) \varphi_{n+1}^{m+1} \\ &= \varphi_{n+1}^{m+2} \end{aligned}$$

R_3 : Aus R_2 erhält man durch vollständige Induktion für jedes
 m mit $1 \leq m \leq n$:

$$i_{(n-1)*} \cdots i_{(n-m)*}(1) = \varphi_n^m \quad .$$

Da aber für jedes $l \geq 1$ gilt :

$$f_l i_{l-1} = f_{l-1} \quad ,$$

folgt :

$$f_{n*}(\varphi_n^m) = f_{(n-m)*}(1) = \mu_{g-n+m} \quad .$$

Daraus ergibt sich die Behauptung, denn für $m > n$ gilt :

$$A_m(\text{Div}_n) = 0$$

und deswegen :

$$f_{n*}(\varphi_n^m) = f_{n*}(0) = 0 = \mu_{g-n+m} \quad .$$

R_4 folgt sofort aus der einfach zu beweisenden Prop. 17 in [26],

S. 156 und dem Satz vom Quadrat ([26], S. 209, Cor. 1 bzw. [14], S. 93, Cor.).

Ein davon unabhängiger Beweis wird in Lemma 9 (2), § 6, gebracht.

Mit diesen Rechenregeln erhalten wir nun leicht den

Satz 2

Für jede nicht negative ganze Zahl n gilt :

$$\begin{aligned} c(\operatorname{Div}_n) &= \left(\sum_{i \geq 0} (1 + \varphi_n)^{g-n-1-i} f_n^*(\mu_i) \right)^{-1} \\ &= \left(\sum_{i \geq 0} \sum_{0 \leq j \leq i} \binom{g-n-1-j}{i-j} \varphi_n^{i-j} f_n^*(\mu_j) \right)^{-1} \end{aligned}$$

Beweis:

Ist $n \geq 2g-1$, so erhält man mit Satz 1 (3) und Lemma 2 (2) (J hat als Abelsche Mannigfaltigkeit triviales Tangentialbündel) :

$$\begin{aligned} c(\operatorname{Div}_n)^{-1} &= c(\mathbb{R}\mathcal{S}_n)^{-1} \\ &= \sum_{i \geq 0} (1 + \varphi_n)^{-(n+1-g)-i} f_n^* f_{n*}(\varphi_n^{i+(n+1-g)-1}) \\ &= \sum_{i \geq 0} (1 + \varphi_n)^{g-n-1-i} f_n^*(\mu_i) \quad (\text{nach } R_3) \end{aligned}$$

Durch absteigende Induktion nach n erhalten wir daraus die Behauptung; denn da $\mathcal{O}_{\mathbb{R}\mathcal{S}_{n+1}}(-1)$ das zu dem Divisor $i_n(\operatorname{Div}_n)$ gehörige Ideal von $\mathcal{O}_{\mathbb{R}\mathcal{S}_{n+1}}$ ist, besteht eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_{\mathbb{R}\mathcal{S}_n}$ -Moduln ([3], IV, § 17) :

$$0 \rightarrow T_{\operatorname{Div}_n} \rightarrow i_n^* T_{\operatorname{Div}_{n+1}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{R}\mathcal{S}_n}(1) \rightarrow 0.$$

Wenn also die Behauptung für $n+1$ richtig ist, d.h. wenn gilt :

$$c(\operatorname{Div}_{n+1})^{-1} = \sum_{i \geq 0} (1 + \varphi_{n+1})^{g-n-2-i} f_n^*(\mu_i),$$

so folgt unter Benutzung dieser exakten Sequenz :

$$\begin{aligned}
 c(\operatorname{Div}_n)^{-1} &= (1+\varphi_n) i_n^* (c(\operatorname{Div}_{n+1})^{-1}) \\
 &= (1+\varphi_n) \sum_{i \geq 0} (1+i_n^*(\varphi_{n+1}))^{g-n-2-i} i_n^* f_{n+1}^* (\mu_i) \\
 &= (1+\varphi_n) \sum_{i \geq 0} (1+\varphi_n)^{g-n-2-i} f_n^* (\mu_i) \quad (\text{nach } R_3) \\
 &= \sum_{i \geq 0} (1+\varphi_n)^{g-n-1-i} f_n^* (\mu_i)
 \end{aligned}$$

Also gilt für alle nicht negativen ganzen Zahlen n :

$$\begin{aligned}
 c(\operatorname{Div}_n)^{-1} &= \sum_{i \geq 0} (1+\varphi_n)^{g-n-1-i} f_n^* (\mu_i) \\
 &= \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} \binom{g-n-1-k}{l} \varphi_n^l f_n^* (\mu_k) \\
 &= \sum_{i \geq 0} \sum_{0 \leq j \leq i} \binom{g-n-1-j}{i-j} \varphi_n^{i-j} f_n^* (\mu_j)
 \end{aligned}$$

Bemerkung 3

Andere Darstellungen der Chernklassen von Div_n findet man in [20] bzw. für $k = \mathbb{C}$ in [16] .

§ 3 Funktionen minimalen Grades auf algebraischen Kurven

In diesem Paragraphen zeigen wir, daß es für jede irreduzible glatte Kurve C über k vom Geschlecht g einen Morphismus auf die projektive Gerade $\mathbb{P}_1$ vom Grad $\leq \frac{g+3}{2}$ gibt.

Der Zusammenhang dieser Frage mit Divisoren wird beschrieben in der

Bemerkung 4

Es gibt einen Morphismus von C auf die projektive Gerade $\mathbb{P}_1$ vom Grad $\leq n$ genau dann, wenn es einen positiven Divisor D auf C gibt mit Grad $\leq n$ und $\dim_k H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) \geq 2$.

Beweis:

Ist nämlich $f: C \rightarrow \mathbb{P}_1$ ein surjektiver Morphismus vom Grad d , so ist der Nullstellendivisor D von f positiv, vom Grad d und $\dim_k H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) \geq 2$.

Sei umgekehrt D ein positiver Divisor auf C vom Grad d und $\dim_k H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) \geq 2$. Man wähle linear unabhängige Schnitte $f_1, f_2 \in H^0(C, \mathcal{O}_C(D))$. Ist dann D' der Divisor der gemeinsamen Nullstellen von f_1 und f_2 , $g \in H^0(C, \mathcal{O}_C(D'))$ ein Schnitt mit Nullstellendivisor D' , so sind $f_1 g^{-1}$ und $f_2 g^{-1}$ linear unabhängige Schnitte von $\mathcal{O}_C(D-D')$ ohne gemeinsame Nullstellen; also wird durch

$$x \mapsto [f_1 g^{-1}(x), f_2 g^{-1}(x)]$$

ein Morphismus von C auf $\mathbb{P}_1$ vom Grad $\text{grad}(D-D') \leq d$ definiert.

Mit Hilfe des Satzes von Riemann - Roch läßt sich leicht zeigen:

Bemerkung 5

- (1) Es gibt einen Morphismus von C auf $\mathbb{P}_1$ vom Grad $\leq g+1$.
 (2) Ist $g \geq 2$, so gibt es einen Morphismus von C auf $\mathbb{P}_1$
 vom Grad $\leq g$.

Beweis :

Um (1) bzw. (2) zu beweisen, genügt es nach Bemerkung 4 , einen positiven Divisor D auf C mit $\dim_k H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) \geq 2$ und $\text{Grad} \leq g+1$ bzw. $\leq g$ anzugeben.

(1) Der Divisor $D := (g+1).c$ hat den Grad $g+1$; nach dem Satz von Riemann - Roch gilt weiter :

$$\dim_k H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) - \dim_k H^1(C, \mathcal{O}_C(D)) = (g+1) + 1 - g = 2$$

und damit insbesondere : $\dim_k H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) \geq 2$.

(2) Wir bemerken zunächst :

Ist D irgendein Divisor und F ein Primdivisor auf C , so gibt es eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_C$ - Moduln :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(D) \rightarrow \mathcal{O}_C(D+F) \rightarrow \mathcal{O}_F \rightarrow 0$$

Daraus erhält man eine exakte Sequenz von k -Vektorräumen :

$$0 \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(D+F)) \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_F) \simeq k$$

und damit insbesondere :

$$\dim_k H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) \geq \dim_k H^0(C, \mathcal{O}_C(D+F)) - 1 .$$

Sei nun K ein kanonischer Divisor auf C . Indem man das soeben bewiesene $(g-2)$ - mal benutzt, erhält man aus K einen Divisor D vom Grad $(2g-2) - (g-2) = g$ und

$$\dim_k H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) \geq \dim_k H^0(C, \mathcal{O}_C(K)) - (g-2) = 2 .$$

Lemma 3

Wenn es keine positiven Divisoren D vom Grad n auf C gibt mit $\dim_k H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) \geq 2$, so ist der Morphismus $f_n : \text{Div}_n \rightarrow J$ eine abgeschlossene Immersion.

Beweis:

Für jeden k -rationalen Punkt x von J gibt es dann nämlich eine invertierbare Garbe $\mathcal{F}$ auf C mit

$$f_n^{-1}(x) \simeq \mathbb{A}^1(H^0(C, \mathcal{F})) \simeq \text{Spec}(k) ;$$

da aber f_n eigentlich ist, ist f_n deshalb eine abgeschlossene Immersion ([3], IV, 18.12.6).

Satz 3

Für jede irreduzible komplette glatte Kurve vom Geschlecht g über einem algebraisch abgeschlossenen Körper gibt es einen Morphismus auf die projektive Gerade vom Grad $\leq \frac{g+3}{2}$.

Beweis:

Angenommen, es gibt keinen solchen Morphismus.

Nach Bemerkung 4 und Lemma 3 gibt es dann für jedes $n \leq \frac{g+3}{2}$ eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_{\text{Div}_n}$ -Moduln:

$$0 \rightarrow T_{\text{Div}_n} \rightarrow f_n^* T_J \rightarrow N \rightarrow 0$$

wobei N lokal frei vom Rang $g-n$ ist, falls $g \geq 2$ ist, was wir wegen Bemerkung 5 (1) ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen dürfen; insbesondere verschwindet die $(g-n+1)$ -te Chernklasse η von N .

Da J eine Abelsche Mannigfaltigkeit ist, ist T_J trivial, also auch $f_n^* T_J$; deshalb erhält man mit Hilfe dieser exakten Sequenz und Satz 2 :

$$\begin{aligned} c(N) &= c(\text{Div}_n)^{-1} \\ &= \sum_{i \geq 0} \sum_{0 \leq j \leq i} \binom{g-n-1-j}{i-j} \varphi_n^{i-j} f_n^*(\mu_j) \end{aligned}$$

Daraus erhält man für η :

$$\begin{aligned} \eta &= \sum_{0 \leq j \leq g-n+1} \binom{g-n-1-j}{g-n+1-j} \varphi_n^{g-n+1-j} f_n^*(\mu_j) \\ &= \binom{-1}{1} \varphi_n f_n^*(\mu_{g-n}) + \binom{-2}{0} f_n^*(\mu_{g-n+1}) \\ &= -\varphi_n f_n^*(\mu_{g-n}) + f_n^*(\mu_{g-n+1}) \end{aligned}$$

Ist g eine gerade Zahl, so folgt für $n := \frac{g+2}{2}$:

$$\begin{aligned} \deg(f_n^*(\varphi_n \eta)) &= \deg(f_n^*(-\varphi_n^2 f_n^*(\mu_{g-n}) + \varphi_n f_n^*(\mu_{g-n+1}))) \\ &= \deg(-f_n^*(\varphi_n^2 f_n^*(\mu_{g-n})) + f_n^*(\varphi_n f_n^*(\mu_{g-n+1}))) \\ &= \deg(-f_n^*(\varphi_n^2) \mu_{g-n} + f_n^*(\varphi_n) \mu_{g-n+1}) \\ &= \deg(-\mu_{g-n+2} \mu_{g-n} + \mu_{g-n+1} \mu_{g-n+1}) \quad (R_3) \\ &= -\binom{g}{g-n} + \binom{g}{g-n+1} \quad (R_4) \\ &\neq 0 \quad \text{da sonst } g-n+1 = n, \text{ also } n = \frac{g+1}{2} < \frac{g+2}{2} = n. \end{aligned}$$

Ist g eine ungerade Zahl, so folgt für $n := \frac{g+3}{2}$ analog :

$$\begin{aligned} \deg(f_n^*(\varphi_n^2 \eta)) &= \deg(f_n^*(-\varphi_n^3 f_n^*(\mu_{g-n}) + \varphi_n^2 f_n^*(\mu_{g-n+1}))) \\ &= \deg(-f_n^*(\varphi_n^3 f_n^*(\mu_{g-n})) + f_n^*(\varphi_n^2 f_n^*(\mu_{g-n+1}))) \\ &= \deg(-f_n^*(\varphi_n^3) \mu_{g-n} + f_n^*(\varphi_n^2) \mu_{g-n+1}) \\ &= \deg(-\mu_{g-n+3} \mu_{g-n} + \mu_{g-n+2} \mu_{g-n+1}) \end{aligned}$$

$$= - \binom{g}{g-n} + \binom{g}{g-n+1}$$

$$\neq 0 \quad \text{da sonst } g-n+1 = n, \text{ also } n = \frac{g+1}{2} < \frac{g+3}{2} = n.$$

In jedem Fall erhält man somit : $\eta \neq 0$.

Dies ist ein Widerspruch; Satz 3 ist damit bewiesen.

§ 4 Eine geometrische Interpretation der Chern - Klassen

Bekannt ist die folgende geometrische Interpretation der n -ten Chernklasse $c_n(E)$ eines Vektorbündels E vom Rang n auf einer quasiprojektiven glatten Mannigfaltigkeit X (vgl. [7]):

Ist s ein globaler Schnitt von E , der transversal zum Nullschnitt ist, und Y die Menge der Nullstellen von s (die somit eine glatte algebraische Menge der Codimension n in X ist), dann ist $c_n(E)$ die Klasse von Y in $A(X)$.

Angeregt durch Thoms Studium der Singularitäten differenzierbarer Abbildungen wurde von verschiedenen Autoren eine geometrische Interpretation der Chernklassen $c_i(E)$ für $i < n$ angegeben (vgl. z.B. die 'Determinantenformel' [11], [22]).

Ohne Benutzung dieser allgemeinen Formeln bringen wir in diesem Paragraphen eine geometrische Interpretation der Chernklassen $c_i(E)$, die besonders nützlich ist für Anwendungen auf lineare Systeme auf Kurven (vgl. [20]).

Für diese Interpretation benutzen wir die 'projektive Vervollständigung $\hat{E}$ eines Vektorbündels E längs seiner Fasern', d.h. wir setzen

$$\hat{E} := \mathbb{R}(E \oplus T) ,$$

wobei T das triviale Vektorbündel auf X bezeichnet. Die Einbettung $E \hookrightarrow E \oplus T$ induziert eine Einbettung $\mathbb{R}(E) \hookrightarrow \hat{E}$, derart, daß sich E auf natürliche Weise mit $\hat{E} \setminus \mathbb{R}(E)$ identifiziert; im folgenden machen wir diese Identifikation und betrachten jeden globalen Schnitt von E als Morphismus von X in $\hat{E}$.

Dann kann man die n -te Chernklasse $c_n(E)$ wie folgt interpretieren (vgl. mit dem Anhang zu [1]):

Ist s_0 der Nullschnitt von E , E_0 die von $s_0(X)$ definierte Klasse in $A(\hat{E})$ und s ein globaler Schnitt von E (betrachtet als Morphismus $s: X \rightarrow \hat{E}$), so gilt:

$$s^*(E_0) = c_n(E).$$

Im folgenden sei X eine quasiprojektive glatte algebraische Mannigfaltigkeit, $\mathcal{E}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$ -Modul vom Rang n , V ein $(r+1)$ -dimensionaler Teilvektorraum von $H^0(X, \mathcal{E})$, $P := \mathbb{P}(V)$, $\pi: V \setminus \{0\} \rightarrow P$ die kanonische Abbildung und $p: PxX \rightarrow P$ bzw. $q: PxX \rightarrow X$ die Projektion auf den ersten bzw. zweiten Faktor.

Man erhält einen natürlichen Isomorphismus

$$\alpha: \text{Hom}_k(V, H^0(X, \mathcal{E})) \simeq H^0(PxX, p^*\mathcal{O}_P(1) \otimes q^*\mathcal{E})$$

durch Komposition der natürlichen Isomorphismen

$$\begin{aligned} \text{Hom}_k(V, H^0(X, \mathcal{E})) &\simeq V^* \otimes H^0(X, \mathcal{E}) \\ &\simeq H^0(P, \mathcal{O}_P(1)) \otimes H^0(X, \mathcal{E}) \\ &\simeq H^0(PxX, p^*\mathcal{O}_P(1) \otimes q^*\mathcal{E}). \end{aligned}$$

Ist $j: V \rightarrow H^0(X, \mathcal{E})$ die kanonische Injektion, so hat

$$s := \alpha(j) \in H^0(PxX, p^*\mathcal{O}_P(1) \otimes q^*\mathcal{E})$$

aufgrund der Konstruktion von α die folgende Eigenschaft:

Für jedes $v \in V$, $v \neq 0$ und für jedes $x \in X$ gilt:

$$s(\bar{v}, x) = 0 \iff v(x) = 0.$$

Sei E das zu $p^*\mathcal{O}_P(1) \otimes q^*\mathcal{E}$ assoziierte Vektorbündel auf PxX , σ der s entsprechende globale Schnitt von E , σ_0 der Nullschnitt von E und ε_0 die Klasse von $\sigma_0(PxX)$ in $A(\hat{E})$.

Offenbar gilt dann:

$$\begin{aligned} q(\sigma^{-1}(\sigma_0(PxX))) &= q(\{(y, x) | y \in P, x \in X, s(y, x) = 0\}) \\ &= \{x | x \in X, \text{für manche } v \in V, v \neq 0 \text{ gilt: } v(x) = 0\} \end{aligned}$$

Bezeichnet für jedes $x \in X$ V_x das Bild von V in der Faser F_x des zu $\mathcal{E}$ assoziierten Vektorbündels F , so gilt also :

$$q(\sigma^{-1}(\sigma_0(P \times X))) = \{x | x \in X, \dim_k V_x < \dim_k V\}$$

$$\text{d.h.} \quad Z_V^{\mathcal{E}} := q_* \sigma^*(\epsilon_0)$$

beschreibt in $A(X)$ den Ort, wo $r+1$ linear unabhängige globale Schnitte von $\mathcal{E}$ (bzw. F) linear abhängig werden.

Dies liefert die von uns angestrebte geometrische Interpretation der Chernklassen von $\mathcal{E}$ (vgl. mit [20], wo eine solche Interpretation mit gewissen Transversalitätsbedingungen steht) :

Satz 4

Es sei X eine quasiprojektive glatte algebraische Mannigfaltigkeit, $\mathcal{E}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$ -Modul vom Rang n und V ein $(r+1)$ -dimensionaler Teilraum von $H^0(X, \mathcal{E})$.

$$\text{Dann gilt:} \quad Z_V^{\mathcal{E}} = c_{n-r}(\mathcal{E}) \quad .$$

Beweis:

In den obigen Bezeichnungen gilt :

$$\begin{aligned} \sigma^*(\epsilon_0) &= c_n(E) \quad ([7], n = \text{rg}(E)) \\ &= c_n(p^* \mathcal{O}_P(1) \otimes q^* \mathcal{E}) \end{aligned}$$

$$\text{Ist also} \quad c(\mathcal{O}_P(1)) = 1 + \eta \quad \text{mit} \quad \eta \in A_1(P)$$

$$\text{und} \quad c(\mathcal{E}) = \sum_{0 \leq i \leq n} c_i \quad \text{mit} \quad c_0 = 1 \quad \text{und} \quad c_i \in A_i(X),$$

$$\text{so gilt:} \quad c(p^* \mathcal{O}_P(1) \otimes q^* \mathcal{E}) = \sum_{0 \leq i \leq n} (1 + p^*(\eta))^{n-i} q^*(c_i) \quad ,$$

$$\text{also:} \quad \sigma^*(\epsilon_0) = \sum_{0 \leq i \leq n} p^*(\eta^{n-i}) q^*(c_i)$$

und deshalb folgt :

$$\begin{aligned}
 Z_V^{\mathcal{E}} &= q_* s^*(\varepsilon_0) \\
 &= \sum_{0 \leq i \leq n} q_*(p^*(\eta^{n-i})) c_i && \text{('Projektionsformel')} \\
 &= c_{n-r} && (r = \dim P)
 \end{aligned}$$

Bemerkung 6

Für $r = 0$ erhält man aus Satz 1 die eingangs angegebene geometrische Interpretation der n -ten Chernklasse $c_n(E)$ eines Vektorbündels vom Rang n auf X wieder zurück ; denn ist s ein von null verschiedener globaler Schnitt von E , so gilt für $V := k.s : P := \mathbb{P}(V)$ ist einpunktig, also die Projektion $q : P \times X \rightarrow X$ ein Isomorphismus und $s^*(\varepsilon_0) = Z_V^{\mathcal{E}} = c_n(E)$.

§ 5 Divisormannigfaltigkeiten und lineare Systeme

Bekanntlich heißt eine nichtleere Menge L positiver Divisoren auf der Kurve C ein lineares System der Dimension r und vom Grad l , falls es einen Divisor D vom Grad l auf C gibt und einen $(r+1)$ -dimensionalen Teilraum V von $H^0(C, \mathcal{O}_C(D))$ mit $L = \{\text{div}(s) \mid s \in V, s \neq 0\}$; offenbar wird durch die Abbildung $s \mapsto \text{div}(s)$ eine Bijektion von $\mathbb{K}(V)$ auf L induziert.

Im folgenden zeigen wir, wie man der Menge aller positiven Divisoren vom Grad n , die in einem gegebenen linearen System L enthalten sind (d.h. von einem Divisor aus L majorisiert werden), auf natürliche Weise ein Element des Chow-Ringes $A(\text{Div}_n)$ von Div_n zuordnen kann; dieses Vorgehen ermöglicht es uns im nächsten Paragraphen, auf einfache Weise Sätze der Abzählenden Geometrie durch Betrachtung des Grades von Produkten solcher Elemente zu beweisen.

Es sei n eine natürliche Zahl, $q : \text{Div}_{n-1} \times C \rightarrow C$ die Projektion auf den zweiten Faktor und $f : \text{Div}_{n-1} \times C \rightarrow \text{Div}_n$ der durch $(D, P) \mapsto D + P$ definierte Morphismus; f ist endlich und flach vom Rang n ([10], s. 29). Insbesondere ist also für jede invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ auf C

$$\mathcal{L}_n := f_* q^* \mathcal{L}$$

ein lokal freier $\mathcal{O}_{\text{Div}_n}$ -Modul vom Rang n .

Man erhält einen natürlichen Isomorphismus

$$\alpha_n^{\mathcal{L}} : H^0(C, \mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} H^0(\text{Div}_n, \mathcal{L}_n)$$

durch Komposition der natürlichen Isomorphismen

$$\begin{aligned}
 H^0(C, \mathcal{L}) &\cong H^0(\text{Div}_{n-1}, \mathcal{O}_{\text{Div}_{n-1}}) \otimes H^0(C, \mathcal{L}) \\
 &\quad \text{da } \text{Div}_{n-1} \text{ komplett und irreduzibel ist} \\
 &\cong H^0(\text{Div}_{n-1} \times C, q^* \mathcal{L}) \\
 &= H^0(\text{Div}_n, f_* q^* \mathcal{L}) \\
 &= H^0(\text{Div}_n, \mathcal{L}_n)
 \end{aligned}$$

Nach Konstruktion von $\alpha_n^{\mathcal{L}}$ gilt dann für jedes $D \in \text{Div}_n$ und für jedes $s \in H^0(C, \mathcal{L})$:

$$\alpha_n^{\mathcal{L}}(s)(D) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad D \leq \text{div}(s) \quad .$$

Mit dieser Eigenschaft von $\alpha_n^{\mathcal{L}}$ stellen wir nun eine Verbindung her zwischen der geometrischen Interpretation der Chernklassen aus § 4 und linearen Systemen auf einer Kurve C .

Es sei L ein lineares System der Dimension r und vom Grad l auf der Kurve C . Man wähle einen Divisor D vom Grad l und einen $(r+1)$ -dimensionalen Untervektorraum $V \subseteq H^0(C, \mathcal{O}_C(D))$ mit $L = \{\text{div}(s) \mid s \in V, s \neq 0\}$. Mit Hilfe von Satz 1 sieht man leicht, daß

$$L_n := Z_{\alpha_n(V)}^{\mathcal{O}_C(D)_n} \in A(\text{Div}_n)$$

unabhängig von der Wahl von D und V ist.

L_n beschreibt also in $A(\text{Div}_n)$ die Menge

$$\begin{aligned}
 \{x \mid x \in \text{Div}_n, \alpha_n^{\mathcal{O}_C(D)_n}(s)(x) = 0 \text{ für manche } s \in V, s \neq 0\} \\
 = \{x \mid x \in \text{Div}_n, \text{ für manche } y \in L \text{ gilt: } x \leq y\} ,
 \end{aligned}$$

d.h. die Menge der in L enthaltenen positiven Divisoren vom Grad n .

Bemerkung 7

Man sieht leicht, daß es einen Zykel auf Div_n gibt, dessen Träger

$$\{x | x \in \text{Div}_n, \text{ für manche } y \in L \text{ gilt: } x \leq y\}$$

ist und dessen Klasse modulo rationaler Äquivalenz L_n ist.

Verfolgt man nämlich die Konstruktion von

$$L_n := Z_W^{\mathcal{E}}$$

mit $\mathcal{E} := \mathcal{O}_{C(D)_n}$ und $W := \alpha_n^{\mathcal{O}_{C(D)}(V)}$, so gilt in den entsprechenden Bezeichnungen von § 4 :

$$Z_W^{\mathcal{E}} := q_* \sigma^*(\epsilon_0) \quad .$$

Nun gilt aber für $P := \mathbb{R}(W)$ und $X := \text{Div}_n$:

$$\sigma^{-1}(\sigma_0(P \times X)) = \{(\bar{w}, x) | w \in W, w \neq 0, x \in \text{Div}_n, \text{div}(w) \geq x\}$$

ist vermöge der Projektion $P \times X \rightarrow X$ eine endliche Überlagerung von P (über jedem Punkt $\bar{w}$ von P liegen nur die endlich vielen Divisoren x von Div_n , die in $\text{div}(w)$ enthalten sind).

Deshalb ist $\sigma^{-1}(\sigma_0(P \times X))$ rein r -dimensional; ist also S der durch $\sigma^{-1}(\sigma_0(P \times X))$ definierte Zykel, so hat der Zykel $q(S)$ den Träger $\{x | x \in \text{Div}_n, \text{ für manche } y \in L \text{ gilt: } x \leq y\}$ und

definiert in $A(\text{Div}_n)$ $q_* \sigma^*(\epsilon_0) = L_n$.

Diesen Zykel nennen wir im folgenden den L_n definierenden Zykel.

Satz 4 gibt eine Möglichkeit an, L_n zu berechnen :

$$L_n = c_{n-r}(\mathcal{O}_{C(D)_n}) \quad .$$

Die Chernklassen von $\mathcal{O}_{C(D)_n}$ aber können wir folgendermaßen berechnen : mit Hilfe exakter Cohomologiesequenzen verschaffen wir uns exakte Sequenzen von Garben auf Div_n , in denen $\mathcal{O}_{C(D)_n}$

vorkommt und sonst nur Garben, deren Chernklassen wir leicht berechnen können. Dies führen wir in den folgenden beiden Lemmata durch; wir benutzen dabei die folgende Bezeichnung :

Für jede invertierbare $\mathcal{O}_C$ - Garbe $\mathcal{L}$ vom Grad 1 bezeichnet $\gamma_{\mathcal{L}}$ den durch $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_C(-1.c)$ definierten Automorphismus der Jacobischen $J = \text{Pic}_{C/k}^0$.

Sind $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}'$ isomorphe invertierbare $\mathcal{O}_C$ - Garben, gilt offenbar : $\gamma_{\mathcal{L}} = \gamma_{\mathcal{L}'}$. Dies zeigt insbesondere, daß für jedes lineare System $L \in \gamma_{\mathcal{O}_C(D)}$ unabhängig von der Wahl von $D \in L$ ist; diesen Automorphismus von J bezeichnen wir mit γ_L .

Lemma 4

Es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare $\mathcal{O}_C$ - Garbe vom Grad 1, $p : C \times J \rightarrow J$ die Projektion von $C \times J$ auf J , n eine natürliche Zahl und für $i = 0, 1$ sei

$$\mathcal{E}_{\mathcal{L},n}^i := f_n^* \gamma_{\mathcal{L}}^* R^i p_* \mathcal{P}_{1-n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_n}(-1)$$

$$\text{und} \quad h^i(\mathcal{L}) := \dim_k H^i(C, \mathcal{L}) \quad .$$

Dann gilt :

(1) Es gibt eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_{\text{Div}_n}$ - Moduln :

$$0 \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{L},n}^0 \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Div}_n}^{h^0(\mathcal{L})} \rightarrow \mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{L},n}^1 \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Div}_n}^{h^1(\mathcal{L})} \rightarrow 0 ;$$

darüberhinaus gilt für $n > 1$: $\mathcal{E}_{\mathcal{L},n}^0 = 0$.

(2) Ist $i_n : \text{Div}_n \rightarrow \text{Div}_{n+1}$ die durch $D \mapsto D+1.c$ definierte abgeschlossene Immersion (vgl. Satz 1), so gibt es eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_{\text{Div}_n}$ - Moduln :

$$0 \rightarrow i_n^* \mathcal{E}_{\mathcal{L},n+1}^0 \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{L},n}^0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_n}(-1) \rightarrow i_n^* \mathcal{E}_{\mathcal{L},n+1}^1 \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{L},n}^1 \rightarrow 0 .$$

Beweis von (1) :

Sei $f: \text{Div}_{n-1} \times C \rightarrow C$ der durch $(D, P) \mapsto D+P$ und $g: \text{Div}_{n-1} \times C \rightarrow \text{Div}_n \times C$ der durch $(x, y) \mapsto (f(x, y), y)$ definierte Morphismus ; g ist eine abgeschlossene Immersion ([10], S. 32) . Dann besteht ein kommutatives Diagramm :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Div}_n & \xleftarrow{f} & \text{Div}_{n-1} \times C & \xrightarrow{g} & C \\ & \nwarrow p_1 & \downarrow g & \nearrow p_2 & \\ & & \text{Div}_n \times C & & \end{array}$$

wobei q, p_1, p_2 kanonische Projektionen bezeichnen.

Sei V das Bild von g und I das durch V definierte Ideal von $\mathcal{O}_{\text{Div}_n \times C}$. Aus der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow I \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Div}_n \times C} \rightarrow g_* \mathcal{O}_{\text{Div}_{n-1} \times C} \rightarrow 0$$

erhält man nach Tensorieren mit $p_2^* \mathcal{L}$:

$$0 \rightarrow p_2^* \mathcal{L} \otimes I \rightarrow p_2^* \mathcal{L} \rightarrow p_2^* \mathcal{L} \otimes g_* \mathcal{O}_{\text{Div}_{n-1} \times C} \rightarrow 0 .$$

Daraus erhält man die exakte Cohomologiesequenz von $\mathcal{O}_{\text{Div}_n}$ - Moduln :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow p_{1*}(p_2^* \mathcal{L} \otimes I) \rightarrow p_{1*} p_2^* \mathcal{L} \rightarrow p_{1*}(p_2^* \mathcal{L} \otimes g_* \mathcal{O}_{\text{Div}_{n-1} \times C}) \rightarrow \\ \rightarrow R^1 p_{1*}(p_2^* \mathcal{L} \otimes I) \rightarrow R^1 p_{1*} p_2^* \mathcal{L} \rightarrow R^1 p_{1*}(p_2^* \mathcal{L} \otimes g_* \mathcal{O}_{\text{Div}_{n-1} \times C}) . \end{aligned}$$

Aus dieser Sequenz erhalten wir die behauptete :

$$(1) \quad R^i p_{1*}(p_2^* \mathcal{L} \otimes I) = \mathcal{C}_{\mathcal{L}, n}^i \quad \text{für } i = 0, 1 \quad :$$

Für $f'_n := f_n \times 1_C$ erhält man das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \text{Div}_n \times C & \xrightarrow{f'_n} & J \times C \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p \\ \text{Div}_n & \xrightarrow{f_n} & J \end{array}$$

Sei W das Bild der abgeschlossenen Immersion $i_{n-1}: \text{Div}_{n-1} \rightarrow \text{Div}_n$; betrachtet man V bzw. W als Divisor auf $\text{Div}_n \times C$ bzw. Div_n , so erhält man aufgrund der Wahl der Poincaré - Garbe $\mathcal{P}_n$ und des 'see-saw principle' einen Isomorphismus:

$$\mathcal{O}_{\text{Div}_n \times C}(V) \otimes p_1^* \mathcal{O}_{\text{Div}_n}(-W) \cong f_n^* \mathcal{P}_n.$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned} I &\cong \mathcal{O}_{\text{Div}_n \times C}(-V) \\ &\cong f_n^* \mathcal{P}_n \otimes p_1^* \mathcal{O}_{\text{Div}_n}(-W) \\ &\cong f_n^* \mathcal{P}_n \otimes p_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \quad (\text{Satz 1 (2)}) \end{aligned}$$

Bezeichnet $p': J \times C \rightarrow C$ die Projektion von $J \times C$ auf C , so gilt:

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{P} \otimes p'^* \mathcal{O}_C(n.c)$$

$$\text{und} \quad p' f_n' = p_2$$

und deshalb folgt für $i = 0, 1$:

$$\begin{aligned} R^i p_{1*} (p_2^* \mathcal{L} \otimes I) &\cong R^i p_{1*} (f_n^* p'^* \mathcal{L} \otimes f_n^* (\mathcal{P} \otimes p'^* \mathcal{O}_C(-n.c)) \otimes p_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) \\ &\cong R^i p_{1*} f_n^* (\mathcal{P} \otimes p'^* (\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_C(-n.c))) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \\ &\text{da } \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \text{ lokal frei ist ([3], 0, 12.2.3.1).} \end{aligned}$$

Für $\gamma_{\mathcal{L}}' := \gamma_{\mathcal{L}} \times 1_C$ hat man das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} J \times C & \xrightarrow{\gamma_{\mathcal{L}}'} & J \times C \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ J & \xrightarrow{\gamma_{\mathcal{L}}'} & J \end{array}$$

Weiter gilt für jede ganze Zahl k :

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathcal{L}}'^* (\mathcal{P} \otimes p'^* \mathcal{O}_C(k.c)) &\cong \gamma_{\mathcal{L}}' \mathcal{P} \otimes \gamma_{\mathcal{L}}'^* p'^* \mathcal{O}_C(k.c) \\ &\cong \mathcal{P} \otimes p'^* (\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_C(-k.c)) \otimes p'^* \mathcal{O}_C(k.c) \end{aligned}$$

nach der Definition von γ

$$\simeq \mathcal{P} \otimes p'^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_C((k-1).c))$$

und deshalb :

$$R^1 p_{1*} f_n^*(\mathcal{P} \otimes p'^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_C((k-1).c)))$$

$$(*) \quad \simeq R^1 p_{1*} f_n^* \gamma_{\mathcal{L}}^*(\mathcal{L} \otimes p'^*(\mathcal{O}_C(k.c)))$$

$$\simeq f_n^* \gamma_{\mathcal{L}}^* R^1 p_{1*} (\mathcal{P} \otimes p'^*(\mathcal{O}_C(k.c)))$$

(Basiswechsel für eigentliche Abbildungen [3],
III, 7.7.5)

Zusammen mit dem oben gezeigten folgt deshalb :

$$\begin{aligned} R^1 p_{1*} (p_2^* \mathcal{L} \otimes I) &\simeq f_n^* \gamma_{\mathcal{L}}^* R^1 p_{1*} (\mathcal{P} \otimes p'^*(\mathcal{O}_C((1-n).c))) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \\ &\simeq f_n^* \gamma_{\mathcal{L}}^* R^1 p_{1*} \mathcal{P}_{1-n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \end{aligned}$$

und das ist die Behauptung.

$$② \quad R^1 p_{1*} p_2^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_{\text{Div}_n}^{h^1(\mathcal{L})} \quad \text{für } i = 0, 1 \quad :$$

denn für jede offene affine Menge $U \subseteq \text{Div}_n$ gilt nach der Künnethformel :

$$\begin{aligned} R^1 p_{1*} p_2^* \mathcal{L}(U) &= H^1(p_1^{-1}(U), p_2^* \mathcal{L}) \\ &= H^1(U \times C, p_2^* \mathcal{L}) \\ &\simeq H^1(C, \mathcal{L}) \otimes H^0(U, \mathcal{O}_{\text{Div}_n}) \quad \text{da } U \text{ affin ist} \\ &= H^1(C, \mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}_{\text{Div}_n}(U) \quad . \end{aligned}$$

Da diese Isomorphismen verträglich sind mit Restriktionen, folgt die Behauptung .

$$③ \quad R^1 p_{1*} (p_2^* \mathcal{L} \otimes g_* \mathcal{O}_{\text{Div}_{n-1} \times C}) \simeq R^1 f_* q^* \mathcal{L} = \begin{cases} \mathcal{L}_n & \text{für } i = 0 \\ 0 & \text{für } i = 1 \end{cases}$$

denn für jede affine offene Menge $U \subseteq \text{Div}_n$ induziert die abge -

geschlossene Immersion g einen Isomorphismus

$$g_U^* : H^i(p_1^{-1}(U), p_2^* \mathcal{L} \otimes_{g_*} \mathcal{O}_{\text{Div}_{n-1} \times C}) \cong H^i(f^{-1}(U), q^* \mathcal{L})$$

$$\text{denn es gilt :} \quad g^{-1}(p_1^{-1}(U)) = f^{-1}(U)$$

$$\begin{aligned} \text{und} \quad g^*(p_2^* \mathcal{L} \otimes_{g_*} \mathcal{O}_{\text{Div}_n \times C}) &\cong g^* p_2^* \mathcal{L} \otimes_{g_*} g^* \mathcal{O}_{\text{Div}_{n-1} \times C} \\ &\cong q^* \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{\text{Div}_{n-1} \times C}} \\ &\cong q^* \mathcal{L} \end{aligned}$$

und $p_2^* \mathcal{L} \otimes_{g_*} \mathcal{O}_{\text{Div}_{n-1} \times C}$ ist null außerhalb von V .

Da die Isomorphismen g_U^* verträglich sind mit Restriktionen, induzieren sie einen Isomorphismus

$$R^i p_{1*}(p_2^* \mathcal{L} \otimes_{g_*} \mathcal{O}_{\text{Div}_{n-1} \times C}) \cong R^i f_* q^* \mathcal{L}.$$

Für $i = 0$ erhält man daraus die Behauptung nach der Definition von $\mathcal{L}_n$. Für $i = 1$ erhält man daraus ebenfalls die Behauptung; denn da f affin ist, verschwinden nach dem Serreschen Kriterium alle höheren Bilder von f .

Aus der eingangs angegebenen exakten Cohomologiesequenz erhält man mit Hilfe von ① - ③ eine exakte Sequenz wie in der Behauptung (1); es bleibt nur noch zu zeigen, daß für $n > 1$

$$\text{gilt :} \quad \mathcal{E}_{\mathcal{L}, n}^0 \cong p_{1*}(p_2^* \mathcal{L} \otimes I) = 0.$$

Nach [3], III, 4.6.1 genügt es zu zeigen, daß für jedes $x \in \text{Div}_n$

$$\text{gilt :} \quad H^0(p_1^{-1}(x), p_2^* \mathcal{L} \otimes I \otimes k(x)) = 0.$$

Dies aber sieht man leicht; ist nämlich x ein k -rationaler Punkt von Div_n und $i : C \cong \{x\} \times C \rightarrow \text{Div}_n \times C$ die von x induzierte Einbettung von C in $\text{Div}_n \times C$, so gilt :

$$i^*(p_2^* \mathcal{L} \otimes I) \cong (p_2 i)^* \mathcal{L} \otimes i^* I \cong \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_C(-x)$$

wegen $p_2 i = 1_C$ und der Definition von V .

Wegen $\deg(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_C(-x)) = 1-n < 0$ gilt aber

$$H^0(C, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_C(-x)) = 0$$

und das war zu zeigen .

Beweis der Behauptung (2) :

Die exakte Sequenz von $\mathcal{O}_C$ - Moduln

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(-(n+1).c) \rightarrow \mathcal{O}_C(-n.c) \rightarrow \mathcal{O}_{C,c} \rightarrow 0$$

induziert nach Tensorieren mit $\mathcal{L}$ die exakte Sequenz von $\mathcal{O}_{\text{Div}_n \times C}$ -Moduln :

$$0 \rightarrow p_2^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_C(-(n+1).c)) \rightarrow p_2^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_C(-n.c)) \rightarrow p_2^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{C,c}) \rightarrow 0 .$$

Nach Tensorieren mit $f_n^* \mathcal{P}$ erhält man die exakte Cohomologiesequenz von $\mathcal{O}_{\text{Div}_n}$ - Moduln :

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow p_{1*}(f_n^* \mathcal{P} \otimes p_2^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_C(-(n+1).c))) \rightarrow p_{1*}(f_n^* \mathcal{P} \otimes p_2^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_C(-n.c))) \\ &\rightarrow p_{1*}(f_n^* \mathcal{P} \otimes p_2^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{C,c})) \rightarrow R^1 p_{1*}(f_n^* \mathcal{P} \otimes p_2^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_C(-(n+1).c))) \\ &\rightarrow R^1 p_{1*}(f_n^* \mathcal{P} \otimes p_2^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_C(-n.c))) \rightarrow R^1 p_{1*}(f_n^* \mathcal{P} \otimes p_2^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{C,c})) \end{aligned}$$

Aus dieser Sequenz erhält man nach Tensorieren mit $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_n}(-1)$ die behauptete :

$$\textcircled{1} \quad R^1 p_{1*}(f_n^* \mathcal{P} \otimes p_2^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_C(-(n+1).c))) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_n}(-1) \simeq i_n^* \mathcal{E}_{\mathcal{L}, n+1}^1$$

für $i = 0, 1$:

denn es gilt :

$$\begin{aligned} i_n^* \mathcal{E}_{\mathcal{L}, n+1}^1 &\simeq i_n^* f_{n+1}^* \gamma_{\mathcal{L}}^* R^1 p_{1*} \mathcal{P}_{1-(n+1)} \otimes i_n^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{n+1}}(-1) \\ &\simeq f_n^* \gamma_{\mathcal{L}}^* R^1 p_{1*} \mathcal{P}_{1-(n+1)} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_n}(-1) \end{aligned}$$

und nach dem Beweis der Behauptung (1) , $\textcircled{1}$, $(*)$, S. 29 gilt weiter :

$$\begin{aligned}
 R^i p_{1*}(f_n^* \check{\mathcal{P}}_{\mathcal{P}_2}^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_C(-(n+1).c))) \\
 \simeq R^i p_{1*} f_n^* (\check{\mathcal{P}}_{\mathcal{P}}^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_C(-(n+1).c))) \\
 \simeq f_n^* \gamma_{\mathcal{L}}^* R^i p_* \mathcal{P}_{1-(n+1)}
 \end{aligned}$$

und daraus folgt sofort die Behauptung.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad R^i p_{1*}(f_n^* \check{\mathcal{P}}_{\mathcal{P}_2}^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_C(-n.c))) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_n}(-1) \simeq \mathcal{E}_{\mathcal{L},n}^i \\
 \text{für } i = 0, 1
 \end{aligned}$$

denn nach $(*)$, S. 29 folgt wie oben :

$$R^i p_{1*}(f_n^* \check{\mathcal{P}}_{\mathcal{P}_2}^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_C(-n.c))) \simeq f_n^* \gamma_{\mathcal{L}}^* R^i p_* \mathcal{P}_{1-n} ;$$

nach Definition von $\mathcal{E}_{\mathcal{L},n}^i$ folgt daraus die Behauptung.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} \quad R^i p_{1*}(f_n^* \check{\mathcal{P}}_{\mathcal{P}_2}^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{C,c})) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_n}(-1) \\
 \simeq \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_n}(-1) & \text{für } i = 0 \\ 0 & \text{für } i = 1 \end{cases} .
 \end{aligned}$$

denn wegen $\mathcal{P}_2 = p' f_n'$ gilt :

$$\begin{aligned}
 R^i p_{1*}(f_n^* \check{\mathcal{P}}_{\mathcal{P}_2}^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{C,c})) &\simeq R^i p_{1*} f_n^* (\check{\mathcal{P}}_{\mathcal{P}}^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{C,c})) \\
 &\simeq R^i p_{1*} f_n^* (\check{\mathcal{P}}_{\mathcal{P}}^* \mathcal{O}_{C,c})
 \end{aligned}$$

da $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe ist

$$\simeq f_n^* R^i p_* (\check{\mathcal{P}}_{\mathcal{P}}^* \mathcal{O}_{C,c})$$

('Basiswechsel' [3], III, 7.7.5)

Für $i = 0$ folgt nach Wahl von $\mathcal{P}$:

$$f_n^* p_* (\check{\mathcal{P}}_{\mathcal{P}}^* \mathcal{O}_{C,c}) \simeq f_n^* \mathcal{O}_J \simeq \mathcal{O}_{\text{Div}_n}$$

und damit die Behauptung .

Für $i = 1$ folgt die Behauptung offenbar aus

$$R^1 p_* (\tilde{\mathcal{P}} \otimes p^* \mathcal{O}_{C,c}) = 0.$$

Um dies zu beweisen, genügt es nach [3], III, 4.6.1 zu zeigen, daß für jeden k -rationalen Punkt x von J gilt:

$$H^1(p^{-1}(x), \tilde{\mathcal{P}} \otimes p^* \mathcal{O}_{C,c} \otimes k(x)) = 0.$$

Dies aber ist klar, denn für jede 'Wolkenkratzergerbe' $\tilde{\mathcal{Y}}$ auf $C \rightarrow p^{-1}(x)$ gilt: $H^1(C, \tilde{\mathcal{Y}}) = 0$.

Mit Hilfe von ① - ③ erhält man aus der obigen exakten Cohomologiesequenz die behauptete.

Lemma 5

Es sei $p: C \times J \rightarrow J$ die Projektion von $C \times J$ auf J .

Für jedes $m < 0$, $n \geq 2g-1$ gibt es eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_J$ -Moduln

$$0 \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_n \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow R^1 p_* (\mathcal{P}_m) \rightarrow 0,$$

wobei $\mathcal{E}$ ein $\mathcal{O}_J$ -Modul mit einer Fahne mit trivialen Faktoren ist.

Beweis:

Wegen $m < n$ besteht eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_C$ -Garben

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(m.c) \rightarrow \mathcal{O}_C(n.c) \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0$$

mit dem Kokern $\mathcal{E}$; weiter erhält man aus $(\mathcal{O}_C(k.c))_{m \leq k \leq n}$ eine Fahne von $\mathcal{E}$, deren Faktoren isomorph zu $\mathcal{O}_{C,c}$ sind.

Ist $p': C \times J \rightarrow C$ die Projektion von $C \times J$ auf C , so ist

$$0 \rightarrow p'^* \mathcal{O}_C(m.c) \rightarrow p'^* \mathcal{O}_C(n.c) \rightarrow p'^* \mathcal{E} \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_{C \times J}$ - Moduln .

Nach Tensorieren mit $\mathcal{P}$ erhält man daraus die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{P}_m \rightarrow \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{P}^*} \otimes \mathcal{C} \rightarrow 0 .$$

Diese Sequenz induziert die Cohomologiesequenz :

$$0 \rightarrow p_* \mathcal{P}_m \rightarrow p_* \mathcal{P}_n \rightarrow p_*(\mathcal{P}_{\mathcal{P}^*} \otimes \mathcal{C}) \rightarrow R^1 p_* \mathcal{P}_m \rightarrow R^1 p_* \mathcal{P}_n$$

Aus dieser Sequenz erhält man die behauptete :

$$\textcircled{1} \quad p_* \mathcal{P}_m = 0$$

Nach [3], III, 4.6.1 genügt es , zu zeigen, daß für jeden k-rationalen Punkt x von J gilt :

$$H^0(p^{-1}(x), \mathcal{P}_m \otimes k(x)) = 0 .$$

Dies ist aber klar, denn keine invertierbare $\mathcal{O}_C$ - Garbe vom Grad $m < 0$ hat nichttriviale Schnitte.

$$\textcircled{2} \quad p_* \mathcal{P}_n \cong \check{\mathcal{L}}_n$$

Wegen $n \geq 2g-1$ ist nach Satz 1 (3) $p_* \mathcal{P}_n$ lokal frei und

$$\check{\mathcal{L}}_n \cong (p_* \mathcal{P}_n)^{\vee\vee} \cong p_* \mathcal{P}_n .$$

$$\textcircled{3} \quad \mathcal{E} := p_*(\mathcal{P}_{\mathcal{P}^*} \otimes \mathcal{C}) \quad \text{hat eine Fahne mit trivialen Faktoren,}$$

denn die eingangs definierte Fahne von $\mathcal{C}$ liefert eine von $\mathcal{E}$ mit Faktoren, die nach Wahl von $\mathcal{P}$ isomorph sind zu

$$p_*(\mathcal{P}_{\mathcal{P}^*} \otimes \mathcal{O}_{C,c}) \cong \mathcal{O}_J .$$

$$\textcircled{4} \quad R^1 p_* \mathcal{P}_n = 0$$

Nach [3], III, 4.6.1 genügt es zu zeigen, daß für jeden k-rationalen Punkt x von J gilt :

$$H^1(p^{-1}(x), \mathcal{P}_n \otimes k(x)) = 0 ;$$

wegen $n \geq 2g-1$ ist dies aber nach dem Satz von Riemann - Roch klar.

Mit Hilfe von (1) - (4) erhält man aus der letzten Sequenz die behauptete .

Die letzten beiden Lemmata ermöglichen es , für jede invertierbare $\mathcal{O}_C$ - Garbe $\mathcal{L}$ die Chernklassen der Garbe $\mathcal{L}_n$ auf Div_n zu berechnen .

Lemma 6

Es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare $\mathcal{O}_C$ - Garbe vom Grad 1 .

Dann gilt für jedes $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} c(\mathcal{L}_n) &= \sum_{0 \leq k \leq g} (1 - \varphi_n)^{n+g-1-k} f_n^* \gamma_{\mathcal{L}}^*(\mu_k) \\ &= \sum_{i \geq 0} \sum_{0 \leq j \leq i} \binom{1-n-g+1}{i-j} \varphi_n^{i-j} f_n^* \gamma_{\mathcal{L}}^*(\mu_j) \end{aligned}$$

Beweis:

Zunächst sei $n > \max(1, 2g-2)$.

Dann gilt nach Lemma 4 (1) :

$$c(\mathcal{L}_n) = c(\mathcal{E}_{\mathcal{L},n}^1) = c(f_n^* \gamma_{\mathcal{L}}^* R^1 p_* \mathcal{P}_{1-n} \otimes (\mathcal{O}_{\mathbb{H}\mathbb{S}_n})^{(-1)}) .$$

$$\text{Nun ist aber} \quad c(\mathcal{O}_{\mathbb{H}\mathbb{S}_n})^{(-1)} = 1 - \varphi_n$$

$$\text{und} \quad c(f_n^* \gamma_{\mathcal{L}}^* R^1 p_* \mathcal{P}_{1-n}) = \sum_{0 \leq k \leq g} f_n^* \gamma_{\mathcal{L}}^*(\mu_k) ,$$

denn nach Lemma 5 besteht eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_J$ - Moduln :

$$0 \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_n \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow R^1 p_* \mathcal{P}_{1-n} \rightarrow 0 ,$$

wobei $\mathcal{E}$ eine Faser mit trivialen Faktoren besitzt; dann gilt

insbesondere $c(\mathcal{E}) = 1$ (wie man leicht durch Induktion

nach der Länge der Fahne sieht), und daher :

$$\begin{aligned} c(R^1 p_* \mathcal{P}_{1-n}) &= c(\mathcal{L}_n^\vee)^{-1} \\ &= \sum_{k \geq n+1-g} f_{n*}(\varphi_n^{k-1}) \quad (\text{Satz 1 (3) , Lemma 2 (1)}) \\ &= \sum_{k \geq 0} f_{n*}(\varphi_n^{n-g+k}) \\ &= \sum_{k \geq 0} \mu_k \quad (R_3) , \end{aligned}$$

$$\text{also : } c(f_n^* \gamma_{\mathcal{L}}^* R^1 p_* \mathcal{P}_{1-n}) = \sum_{0 \leq k \leq g} f_n^* \gamma_{\mathcal{L}}^*(\mu_k) .$$

Nach der Formel für die Chernklassen eines Tensorproduktes folgt deshalb weiter :

$$c(\mathcal{L}_n) = \sum_{0 \leq k \leq g} (1 - \varphi_n)^{n-l+g-1-k} f_n^* \gamma_{\mathcal{L}}^*(\mu_k) ,$$

denn wegen $1-n < 0$ ist $R^1 p_* \mathcal{P}_{1-n}$ nach dem Satz von Riemann - Roch ein lokal freier Modul vom Rang $n-l+g-1$.

Aus dem eben bewiesenen erhält man die Behauptung durch absteigende Induktion für jedes $n \geq 1$:

Ist nämlich die Behauptung richtig für $n+1$, d.h. gilt :

$$c(\mathcal{L}_{n+1}) = \sum_{0 \leq k \leq g} (1 - \varphi_{n+1})^{n-l+g-k} f_{n+1}^* \gamma_{\mathcal{L}}^*(\mu_k) ,$$

so folgt :

$$\begin{aligned} c(\mathcal{L}_n) &= c(\mathcal{E}_{\mathcal{L},n}^0)^{-1} c(\mathcal{E}_{\mathcal{L},n}^1) \quad (\text{Lemma 4 (1)}) \\ &= c(i_n^* \mathcal{E}_{\mathcal{L},n+1}^0)^{-1} c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{L}_n)}(-1))^{-1} c(i_n^* \mathcal{E}_{\mathcal{L},n+1}^1) \\ &\quad (\text{Lemma 4 (2)}) \\ &= (1 - \varphi_n)^{-1} i_n^* (c(\mathcal{E}_{\mathcal{L},n+1}^0)^{-1} c(\mathcal{E}_{\mathcal{L},n+1}^1)) \\ &= (1 - \varphi_n)^{-1} i_n^* (c(\mathcal{L}_{n+1})) \quad (\text{Lemma 4 (1)}) \\ &= (1 - \varphi_n)^{-1} \sum_{0 \leq k \leq g} (1 - i_n^*(\varphi_{n+1}))^{n-l+g-k} i_n^* f_{n+1}^* \gamma_{\mathcal{L}}^*(\mu_k) \\ &= (1 - \varphi_n)^{-1} \sum_{0 \leq k \leq g} (1 - \varphi_n)^{n-l+g-k} f_n^* \gamma_{\mathcal{L}}^*(\mu_k) \quad (R_1) \end{aligned}$$

$$= \sum_{0 \leq k \leq g} (1 - \varphi_n)^{n-1+g-1-k} f_n^* \gamma_{\mathcal{L}}^*(\mu_k) \quad .$$

Deshalb gilt für alle $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} c(\mathcal{L}_n) &= \sum_{0 \leq k \leq g} \sum_{0 \leq r \leq k} (-1)^r \binom{n-1+g-1-k}{r} \varphi_n^r f_n^* \gamma_{\mathcal{L}}^*(\mu_k) \\ &= \sum_{i \geq 0} \sum_{0 \leq j \leq i} (-1)^{i-j} \binom{n-1+g-1-j}{i-j} \varphi_n^{i-j} f_n^* \gamma_{\mathcal{L}}^*(\mu_j) \\ &= \sum_{i \geq 0} \sum_{0 \leq j \leq i} \binom{i-n-g+1}{i-j} \varphi_n^{i-j} f_n^* \gamma_{\mathcal{L}}^*(\mu_j) \quad . \end{aligned}$$

Damit erhalten wir schließlich :

Satz 5

Es sei L ein lineares System vom Grad 1 und der Dimension r auf der Kurve C .

Dann gilt für jedes $n \geq 1$:

$$L_n = \sum_{0 \leq j \leq n-r} \binom{1-r-g}{n-r-j} \varphi_n^{n-r-j} f_n^* \gamma_L^*(\mu_j) \quad .$$

Beweis:

Man wähle einen Divisor D aus L . Dann gilt nach Satz 4 und Lemma 5 :

$$L_n = c_{n-r}(\bigcap_{C(D)} \mathcal{O}_C(D)_n) = \sum_{0 \leq j < n-r} \binom{1-r-g}{n-r-j} \varphi_n^{n-r-j} f_n^* \gamma_L^*(\mu_j) \quad .$$

Bemerkung 8

Es sei $\mathcal{L}^*$ eine invertierbare $\bigcap_C$ - Garbe. Die Garbe $\mathcal{L}_n$ läßt sich auch folgendermaßen beschreiben :

Die symmetrische Gruppe S_n operiert durch Vertauschen der Faktoren auf dem n -fachen Produkt der Kurve C ; Div_n ist ein

Quotient nach dieser Operation. Sei $p: \mathbb{C}^n \rightarrow \text{Div}_n$ die dazugehörige Überlagerung und für $1 \leq i \leq n$ sei $p_i: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ die Projektion auf den i -ten Faktor.

Dann ist $\tilde{\mathcal{L}}_n$ isomorph zu der Garbe auf Div_n , deren Schnitte über einer offenen Menge $U \subseteq \text{Div}_n$ die (bez. S_n) invarianten Schnitte der Garbe $\bigoplus_{1 \leq i \leq n} p_i^* \mathcal{L}$ über der offenen Menge $p^{-1}(U)$ sind.

Diese Beschreibung der Garbe $\tilde{\mathcal{L}}_n$ kann man dazu benutzen, um zu zeigen, daß für die Cotangentialgarben Ω_C auf C bzw. Ω_{Div_n} auf Div_n gilt: $(\Omega_C)_n \simeq \Omega_{\text{Div}_n}$. Mit Hilfe von Lemma 6 erlaubt dies dann eine Berechnung der Chernklassen von Div_n , denn die Chernklassen von Ω_{Div_n} unterscheiden sich von den Chernklassen von Div_n nur durch Vorzeichen (vgl. [20]); einfacher und direkter ist allerdings die in § 2 durchgeführte Berechnung dieser Chernklassen.

§ 6 Abzählende Geometrie linearer und algebraischer Systeme auf algebraischen Kurven

Für die im folgenden gebrachten Beweise der Sätze von de Jonquières, Schubert etc. benötigen wir neben der Formel für L_n (Satz 3) noch Relationen in den Ringen $A(\text{Div}_n)$ bzw. $A(J)$, die wir zunächst beweisen:

Lemma 7

(1) Für jede invertierbare $\mathcal{O}_C$ -Garbe $\mathcal{L}$ und jedes $x \in A(J)$ gilt:

$$\gamma_{\mathcal{L}}^*(x) \equiv x.$$

(2) Für jede ganze Zahl m gilt:

$$(m \cdot \text{id}_J)_* \mu_{g-1} \equiv m^2 \mu_{g-1}.$$

Beweis:

(1) folgt auf Grund der Definition von $\gamma_{\mathcal{L}}$ sofort aus dem Satz vom Quadrat.

(2) Sei $m \neq 0$, $\alpha := m \cdot \text{id}_J$. Dann ist $\alpha^*: A_n(J) \rightarrow A_n(J)$ Multiplikation mit einer ganzen Zahl $n > 0$.

Also gilt für jede Divisorklasse $\delta \in A_1(J)$ einerseits

$$\alpha^*((\alpha_* \mu_{g-1})\delta) = n \cdot (\alpha_* \mu_{g-1})\delta$$

und andererseits

$$\alpha^*((\alpha_* \mu_{g-1})\delta) = (\alpha^* \alpha_* \mu_{g-1})(\alpha^* \delta)$$

$$\equiv n \cdot \mu_{g-1}(\alpha^* \delta)$$

da der $\alpha^* \alpha_* \mu_{g-1}$ zu Grunde liegende Zyklus

aus n Translaten von μ_{g-1} besteht

$$\equiv n \cdot \mu_{g-1} m^2 \delta$$

nach dem Satz vom Quadrat

Also folgt : $\alpha_{\star} \mu_{g-1} \equiv m^2 \cdot \mu_{g-1}$ und das ist die Behauptung.

Lemma 8

Für $n \geq 2$ sei δ_n die Klasse von $\{2 \cdot P + D \mid P \in C, D \in \text{Div}_{n-2}\}$ in $A(\text{Div}_n)$.

Dann gilt : $\frac{1}{2} \delta_n = (n+g-1) \varphi_n - f_n^*(\mu_1)$.

Beweis :

Man hat das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Div}_{n-2} \times C & & \\
 & & \downarrow g' & & \\
 \text{Div}_n & \xleftarrow{f} & \text{Div}_{n-1} \times C & \xrightarrow{q} & C \\
 & \nwarrow p_1 & \downarrow g & \nearrow p_2 & \\
 & & \text{Div}_n \times C & &
 \end{array}$$

wobei $f: \text{Div}_{n-1} \times C \rightarrow \text{Div}_n$ den durch $(D, P) \mapsto D+P$ und $g: \text{Div}_{n-1} \times C \rightarrow \text{Div}_n \times C$ bzw. $g': \text{Div}_{n-2} \times C \rightarrow \text{Div}_{n-1} \times C$ den durch $(D, P) \mapsto (D+P, P)$ definierten Morphismus bezeichnet; p_1, p_2, q sind Projektionen.

δ_n ist offenbar die Klasse des Bildes von $f \circ g'$.

Da f affin ist, gilt nach der Grothendieckschen Version des Riemann - Rochschen Satzes ([1]) :

$$\begin{aligned}
 \text{ch}(f_* \mathcal{O}_{\text{Div}_{n-1} \times C}) \cdot \text{td Div}_n &= f_* (\text{ch}(\mathcal{O}_{\text{Div}_{n-1} \times C}) \cdot \text{td Div}_{n-1} \times C) \\
 &= f_* (\text{td Div}_{n-1} \times C)
 \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt : $f_* \mathcal{O}_{\text{Div}_{n-1} \times C} = f_* q^* \mathcal{O}_C = (\mathcal{O}_C)_n$.

Da g eine abgeschlossene Immersion ist und $\text{Div}_{n-1} \times C$ eine glatte Mannigfaltigkeit, gilt für das Normalenbündel N des Bildes von g in $\text{Div}_n \times C$:

$$td \text{Div}_{n-1} \times C \text{ td } N = g^* td \text{Div}_n \times C = f^* td \text{Div}_n q^* td C$$

Also folgt :

$$\begin{aligned} ch((\mathcal{O}_C)_n) td \text{Div}_n &= f_*(q^* td C (td N)^{-1} f^* td \text{Div}_n) \\ &= f_*(q^* td C (td N)^{-1}) td \text{Div}_n \end{aligned}$$

$$\text{und damit : } ch((\mathcal{O}_C)_n) = f_*(q^* td C (td N)^{-1}) .$$

Definiert man nun : $\gamma := c_1(T_C)$ und $\eta := c_1(N)$,

so gilt : $td C = \frac{\gamma}{1 - \exp(-\gamma)} = 1 + \frac{\gamma}{2}$ und analog :

$$(td N)^{-1} = \sum_{i \geq 0} \frac{(-\eta)^i}{(i+1)!} ; \text{ deshalb folgt :}$$

$$ch((\mathcal{O}_C)_n) = f_*((1 + \frac{q^* \gamma}{2}) \sum_{i \geq 0} \frac{(-\eta)^i}{(i+1)!}) ,$$

insbesondere :

$$\begin{aligned} ch_1((\mathcal{O}_C)_n) &= f_*(\frac{q^* \gamma}{2} - \frac{\eta}{2}) \\ &= -\frac{1}{2} f_*(g^* g'_* 1 - q^* \gamma) \quad \text{da } \eta = c_1(N) \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Überlagerung $C^n \times C \rightarrow \text{Div}_n \times C$ und der bekannten Formel für den Selbstschnitt der Diagonale des Produktes $C \times C$, sieht man aber leicht, daß gilt : $g^* g'_* 1 = g'_* 1 + q^* \gamma$ (γ ist bis auf das Vorzeichen die kanonische Klasse der Kurve C).

Deshalb folgt :

$$ch_1((\mathcal{O}_C)_n) = -\frac{1}{2} f_* g'_* 1 = -\frac{1}{2} \delta_n .$$

Andererseits gilt aber nach Lemma 6 :

$$ch_1((\mathcal{O}_C)_n) = c_1((\mathcal{O}_C)_n)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i \geq 0} \binom{1-n-g}{1-i} \varphi_n^{1-i} f_n^* \gamma_{(\mathcal{Q})_n}^* (\mu_1) \\
 &= (1-n-g) \varphi_n + f_n^* (\mu_1) \quad \text{nach Lemma 7 (1)}
 \end{aligned}$$

und daraus erhält man sofort die Behauptung.

Lemma 9

(1) Für jede ganze Zahl i gilt: $\mu_i \mu_1 \equiv (i+1) \mu_{i+1}$.

(2) Für jede Folge $(i_k)_{1 \leq k \leq l}$ nicht negativer ganzer Zahlen mit $\sum_{1 \leq k \leq l} i_k = g$ gilt:

$$\deg \left(\prod_{1 \leq k \leq l} \mu_{i_k} \right) = (i_1, \dots, i_l)^g := \frac{g!}{\prod_k (i_k!)}$$

Beweis von (1):

O.B.d.A. sei $1 \leq i < g$ (andernfalls ist die Behauptung trivial).

Es ist nach R_3 : $\mu_i \mu_1 = f_{g*}(\varphi_g^i) \mu_1 = f_{g*}(\varphi_g^i f_g^*(\mu_1))$.

Nach Lemma 8 gilt: $\frac{1}{2} \delta_g \equiv (2g-1) \varphi_g - f_g^*(\mu_1)$ und des-

halb: $\mu_i \mu_1 \equiv f_{g*}((2g-1) \varphi_g^{i+1} - \frac{1}{2} \varphi_g^i \delta_g)$

$$= (2g-1) \mu_{i+1} - \frac{1}{2} f_{g*}(\varphi_g^i \delta_g)$$

Nun gilt aber für alle $n, k \geq 1$:

$$\infty \frac{1}{2} f_{n*}(\varphi_n^k \delta_n) = \frac{1}{2} f_{n-1*}(\varphi_{n-1}^{k-1} \delta_{n-1}) + \mu_{g-n+k+1}$$

denn nach Lemma 8 gilt:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} f_{n*}(\varphi_n^k \delta_n) &= f_{n*}((n+g-1) \varphi_n^{k+1} - \varphi_n^k f_n^*(\mu_1)) \\
 &= (n+g-1) \mu_{g-n+k+1} - \mu_{g-n+k} \mu_1
 \end{aligned}$$

und

$$\frac{1}{2} f_{n-1*}(\varphi_{n-1}^{k-1} \delta_{n-1}) = f_{n-1*}((n+g-2) \varphi_{n-1}^k - \varphi_{n-1}^{k-1} f_{n-1}^*(\mu_1))$$

$$= (n+g-2) \mu_{g-n+1+k} - \mu_{g-n+k} \mu_1 ,$$

was $\square$ beweist.

Mit vollständiger Induktion sieht man mit Hilfe von $\square$ leicht, daß gilt :

$$\frac{1}{2} f_{g*}(\varphi_g^1 \delta_g) = \frac{1}{2} f_{g-i*}(\delta_{g-i}) + i \mu_{i+1} .$$

$$\text{Deshalb folgt : } \mu_i \mu_1 \equiv (2g-1-i) \mu_{i+1} - \frac{1}{2} f_{g-i*}(\delta_{g-i})$$

Bezeichnet $\otimes$ das Pontrjagin - Produkt in $A(J)$, folgt :

$$\begin{aligned} f_{g-i*}(\delta_{g-i}) &= f_{g*} i_{g-1*} \dots i_{g-i*}(\delta_{g-i}) \\ &= \mu_{i+2} \otimes (2id_J)_*(\mu_{g-1}) \\ &\quad \text{denn } i_{g-1*} \dots i_{g-i*}(\delta_{g-i}) \text{ ist die Klasse} \\ &\quad \text{von } \{i.c+2P+D \mid P \in C, D \in \text{Div}_{g-(i+2)}\} \text{ in } A(\text{Div}_g) \\ &= \mu_{i+2} \otimes 4 \mu_{g-1} \\ &\quad \text{nach Lemma 7 (2)} \\ &= 4(g-(i+2) + g-(g-1)) \mu_{i+1} \\ &\quad \text{nach Definition des Pontrjaginproduktes} \\ &= 4(g-i-1) \mu_{i+1} \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man somit :

$$\mu_i \mu_1 \equiv (2g-1-i) \mu_{i+1} - 2(g-i-1) \mu_{i+1} = (i+1) \mu_{i+1}$$

und dies wurde behauptet .

Beweis der Behauptung (2) :

Mit vollständiger Induktion erhält man aus (1) für jedes $j \geq 0$:

$$j! \mu_j \equiv \mu_1^j ,$$

$$\begin{aligned}
 \text{also : } \deg(\pi_x \mu_{i_x}) &= \deg(\frac{1}{\pi_x (i_x!)} \mu_1^g) \\
 &= \deg(\frac{g!}{\pi_x (i_x!)} \mu_g) \\
 &= (i_1, \dots, i_l)
 \end{aligned}$$

Bemerkung 9

Insbesondere liefert Lemma 9 (2) einen Beweis der Rechenregel R_4 (vgl. S. 10). Ein anderer Beweis von Lemma 9 steht in [18]; dort steht auch der auf Matsusaka zurückgehende Beweis von Lemma 7 (2).

Im weiteren benutzen wir die folgenden Bezeichnungen :

Es sei n eine natürliche Zahl.

Eine Folge $\pi = (p_i, n_i)_{1 \leq i \leq k}$ natürlicher Zahlen p_i, n_i nennen wir eine Partition von n , falls gilt : $p_1 > p_2 > \dots > p_k$

und $\sum_{1 \leq i \leq k} p_i n_i = n$;

ist D ein Divisor vom Grad n auf der Kurve C , so sagen wir, daß D vom Typ π ist, falls es positive Divisoren D_i vom Grad n_i gibt mit

$$\sum_{1 \leq i \leq k} p_i D_i = D .$$

Ist $\pi = (p_i, n_i)_{1 \leq i \leq k}$ eine Partition von n , so wird durch

$$(D_i)_{1 \leq i \leq k} \mapsto \sum_{1 \leq i \leq k} p_i D_i$$

ein Morphismus von $\Pi_1 \text{ Div}_{n_1}$ auf eine irreduzible abgeschlossene

Teilmannigfaltigkeit von Div_n der Dimension $\sum_{1 \leq i \leq k} n_i$ definiert; die Klasse dieser Teilmannigfaltigkeit in $A(\text{Div}_n)$ bezeichnen wir mit

$$\delta_n(\pi) \quad .$$

$\delta_n(\pi)$ beschreibt also in $A(\text{Div}_n)$ die Divisoren vom Grad n und Typ π ; offenbar gilt für δ_n aus Lemma 7 :

$$\delta_n = \delta_n((2,1), (1,n-2)) \quad .$$

Für jedes $f \in \mathbb{Z}[[X_1, \dots, X_r]]$ bezeichnet

$$f(X_1, \dots, X_r) = \sum \pi_i X_i^{e_i}$$

den Koeffizienten von f bei dem Monom $\pi_i X_i^{e_i}$.

Ist für jedes i mit $1 \leq i \leq s$ $L^{(i)}$ ein lineares System vom Grad l_i auf der Kurve C und ist D ein positiver Divisor vom Grad n auf der Kurve C , so sagen wir, D ist allen $L^{(i)}$ gemeinsam, oder: D ist in jedem $L^{(i)}$ enthalten, falls es für jedes i mit $1 \leq i \leq s$ einen positiven Divisor $D^{(i)}$ vom Grad $l_i - n$ gibt mit $D + D^{(i)} \in L^{(i)}$.

Satz 6

Für jedes i mit $1 \leq i \leq s$ sei $L^{(i)}$ ein lineares System vom Grad l_i und der Dimension r_i auf der Kurve C ; weiter sei n eine natürliche Zahl und $\pi = (p_j, n_j)_{1 \leq j \leq t}$ eine Partition von n .

Gilt dann $\sum_i n-r_i = \sum_j n_j$ und gibt es nur endlich viele positive Divisoren vom Grad n und Typ π , die allen $L^{(i)}$ gemeinsam sind, so ist

$$\alpha := (1 + (\sum_i X_i)(\sum_j p_j^2 Y_j))^g \prod_i (1 + X_i \sum_j p_j Y_j)^{l_i - r_i - g} \prod_{i,j} X_i^{n-r_i} Y_j^{n_j}$$

deren Anzahl (mit Vielfachheiten, d.h. $\alpha = \deg(\delta_n(\pi) \prod_i L_n^{(i)})$).

Beweis:

$$\begin{aligned} \alpha &= \deg f_{n*}(\delta_n(\pi) \prod_i L_n^{(i)}) \\ &= \deg f_{n*}(\delta_n(\pi) \prod_i \sum_{0 \leq k_i \leq n-r_i} \binom{l_i - r_i - g}{n-r_i - k_i} \varphi_n^{n-r_i - k_i} f_n^* \gamma_{L^{(i)}}^*(\mu_{k_i})) \\ &= \deg f_{n*}(\delta_n(\pi) \sum_{k_1, \dots, k_s} \prod_i \binom{l_i - r_i - g}{n-r_i - k_i} \varphi_n^{\sum_i n-r_i - k_i} f_n^*(\prod_i \gamma_{L^{(i)}}^*(\mu_{k_i}))) \\ &= \deg(\sum_{k_1, \dots, k_s} \prod_i \binom{l_i - r_i - g}{n-r_i - k_i} f_{n*}(\delta_n(\pi) \varphi_n^{\sum_i n-r_i - k_i})) \prod_i \mu_{k_i} \end{aligned}$$

wegen der Projektionsformel und da für jede invertierbare Garbe auf C nach Lemma 7 (1) für jedes i mit $1 \leq i \leq s$ gilt:

$$\gamma_{L^{(i)}}^*(\mu_{k_i}) \cong \mu_{k_i}.$$

Da wegen $R_2 \varphi_n^m$ die Klasse von $\{m.c+D \mid D \in \text{Div}_{n-m}\}$ in $A(\text{Div}_n)$ ist, beweist man mit Hilfe der Überlagerung $C^n \rightarrow \text{Div}_n$ leicht, daß gilt:

$$\begin{aligned} \delta_n(\pi) \varphi_n^m &= \\ \sum_{\substack{m_1, \dots, m_t \\ 0 \leq m_j \leq n_j \\ \sum_j m_j = m}} \binom{m}{m_1, \dots, m_t} \prod_j p_j^{m_j} i_{n-1*} \dots i_{\sum_j p_j(n_j - m_j)*} (\delta_{\sum_j p_j(n_j - m_j)}((p_j, n_j - m_j))) \end{aligned}$$

und deshalb folgt:

$$f_{n*}(\delta_n(\pi) \varphi_n^m) =$$

$$\Sigma_{m_1, \dots, m_t} \binom{m}{m_1, \dots, m_t} \Pi_j p_j^{m_j} f_{\Sigma_j p_j (n_j - m_j)} * (\delta_{r_j p_j (n_j - m_j)} ((p_j, n_j - m_j))) .$$

Bezeichnet $*$ das Pontrijagin - Produkt in $A(J)$, so gilt :

$$f_{\Sigma_j p_j (n_j - m_j)} * (\delta_{\Sigma_j p_j (n_j - m_j)} ((p_j, n_j - m_j))) = \bigstar_j (p_j \text{id}_J) * (\mu_{g - (n_j - m_j)})$$

Nun gilt aber ([10], S. 40 Cor.) für alle $q \geq 0$:

$$\mu_{g-1}^q = q! \mu_{g-q}$$

und nach Lemma 7 (2) erhält man für alle ganzen Zahlen p :

$$(p \text{id}_J) * (\mu_{g-1}) \equiv p^2 \mu_{g-1}$$

und deshalb :

$$\begin{aligned} f_{\Sigma_j p_j (n_j - m_j)} * (\delta_{\Sigma_j p_j (n_j - m_j)} ((p_j, n_j - m_j))) \\ = \frac{1}{\Pi_j (n_j - m_j)!} \Pi_j p_j^{2(n_j - m_j)} \mu_{g-1}^{\Sigma_j n_j - m_j} \\ = \binom{\Sigma_j n_j - m_j}{n_1 - m_1, \dots, n_t - m_t} \Pi_j p_j^{2(n_j - m_j)} \mu_{g - \Sigma_j n_j - m_j} . \end{aligned}$$

Daher folgt :

$$\begin{aligned} f_n * (\delta_n (\pi) \varphi_n^m) = \\ \Sigma_{m_1, \dots, m_t} \binom{m}{m_1, \dots, m_t} \binom{\Sigma_j n_j - m_j}{n_1 - m_1, \dots, n_t - m_t} \Pi_j p_j^{2n_j - m_j} \mu_{g - \Sigma_j n_j - m_j} \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man somit :

$$\begin{aligned} \alpha = \deg(r_{k_1, \dots, k_s} \Sigma_{m_1, \dots, m_t} \Pi_1 \binom{l_1 - r_1 - g}{n - r_1 - k_1} \binom{r_1 n - r_1 - k_1}{m_1, \dots, m_t} \binom{\Sigma_j n_j - m_j}{n_1 - m_1, \dots, n_t - m_t} \cdot \\ \cdot \binom{\Sigma_j m_j = r_1 n - r_1 - k_1}{0 \leq k_1 \leq n - r_1} \cdot \Pi_j p_j^{2n_j - m_j} \mu_{g - \Sigma_j n_j - m_j} \Pi_1 \mu_{k_1}) \end{aligned}$$

$$= \pi_{k_1, \dots, k_s} \pi_i^{l_i - r_i - g} \binom{r_i n - r_i - k_i}{m_1, \dots, m_t} \binom{\sum_j n_j - m_j}{n_1 - m_1, \dots, n_t - m_t} \prod_j p_j^{2n_j - m_j} \cdot \binom{g}{g - \sum_j n_j - m_j, k_1, \dots, k_s}$$

nach Lemma 9 (2)

$$= \pi_{k_1, \dots, k_s} \binom{g}{g - r_i k_i, k_1, \dots, k_s} \binom{\sum_i k_i}{n_1 - m_1, \dots, n_t - m_t} \prod_j p_j^{2(n_j - m_j)} \cdot \binom{\sum_i n - r_i - k_i}{m_1, \dots, m_t} \pi_i^{l_i - r_i - g} \prod_j p_j^{m_j}$$

und das ist die Behauptung .

Bemerkung 10

Die Voraussetzung $\sum_i n - r_i = \sum_j n_j$ in Satz 6 besagt offenbar, daß die Zykeln auf Div_n , die $\delta_n(\pi)$, $L_n^{(1)}$, ..., $L_n^{(s)}$ definieren, komplementäre Dimension haben; die Endlichkeitsbedingung ist dann erfüllt, wenn sich diese Zykeln transversal schneiden. Analoges gilt für die nun folgenden Sätze.

Wichtige Spezialfälle von Satz 6 erhält man für $s = 1$ bzw. $\pi = (1, n)$:

Korollar 1 (Formel von de Jonquières)

Es sei L ein lineares System vom Grad l und der Dimension r auf der Kurve C ; weiter sei n eine natürliche Zahl und $\pi = (p_j, n_j)_{1 \leq j \leq t}$ eine Partition von n .

Gilt dann $n - r = \sum_j n_j$ und gibt es nur endlich viele positive Divisoren vom Grad n und Typ π , die in L

enthalten sind, so ist

$$\alpha = (1 + \sum_j p_j^2 Y_j)^g (1 + \sum_j p_j Y_j)^{1-r-g} \prod_j Y_j^{n_j}$$

deren Anzahl (mit Vielfachheiten, d.h. $\alpha = \deg(\delta_n(\pi)L_n)$).

Korollar 2

Für jedes i mit $1 \leq i \leq s$ sei $L^{(i)}$ ein lineares System vom Grad l_i und der Dimension r_i auf der Kurve C ; weiter sei n eine natürliche Zahl.

Gilt dann $n = \sum_i n - r_i$ und gibt es nur endlich viele positive Divisoren vom Grad n , die allen $L^{(i)}$ gemeinsam sind, so ist

$$\alpha = (1 + \sum_i X_i)^g \prod_i (1 + X_i)^{l_i - r_i - g} \prod_i X_i^{n - r_i}$$

deren Anzahl (mit Vielfachheiten, d.h. $\alpha = \deg(\prod_i L^{(i)}_n)$).

Aus der Fülle möglicher Anwendungen bringen wir zur Erläuterung der bisher bewiesenen Sätze einige Beispiele:

(1) $(r+1)$ -fache Punkte eines linearen Systems der Dimension r auf der Kurve C (Formel von Brill-Segre; vgl. [25], S. 187)

Sei L ein lineares System von der Dimension r und vom Grad n auf der Kurve C . Gibt es nur endlich viele positive Divisoren vom Grad n und Typ $\pi := ((r+1, 1), (1, n-(r+1)))$, die in L enthalten sind, so ist

$$\deg(\delta_n(\pi)L_n) = (r+1)(n+rg-r)$$

deren Anzahl (mit Vielfachheiten).

Nach Korollar 1 nämlich gilt : $\deg(\delta_n(\pi)L_n) =$
 $= (1+(r+1)^2 Y_1 + Y_2)^g (1+(r+1)Y_1 + Y_2)^{n-r-g}] Y_1 Y_2^{n-(r+1)}$
 $= (\sum_{i \geq 0} \binom{g}{i} ((r+1)^2 Y_1)^i (1+Y_2)^{g-i}) (\sum_{j \geq 0} \binom{n-r-g}{j} ((r+1)Y_1)^j \cdot$
 $\cdot (1+Y_2)^{n-r-g-j}] Y_1 Y_2^{n-(r+1)}$
 $= (n-r-g)(r+1) + g(r+1)^2 = (r+1)(n+rg-r)$

Wir bemerken, daß es i.a. eben so viele Divisoren vom Grad $r+1$ und Typ $\pi' := (r+1, 1)$ gibt, die in L enthalten sind, d.h. es gilt : $\deg(\delta_{r+1}(\pi')L_{r+1}) =$
 $\deg(\delta_n(\pi)L_n) :$

Nach Korollar 1 erhält man nämlich :

$$\begin{aligned} \deg(\delta_{r+1}(\pi')L_{r+1}) &= (1+(r+1)^2 Y)^g (1+(r+1)Y)^{n-r-g}] Y \\ &= (n-r-g)(r+1) + g(r+1)^2 \\ &= (r+1)(n+rg-r) \end{aligned}$$

In [25] zeigt Severi genauer, daß der Divisor der $(r+1)$ -fachen Punkte von L' linear äquivalent ist zu den Divisoren der Gestalt $(r+1).G + \binom{r+1}{2}.K$, wobei G ein Divisor ('Gruppe') aus L und K ein kanonischer Divisor auf C ist.

In moderner Sprechweise bedeutet dies für $\text{char}(k) = 0$ folgendes :

Man wähle einen Divisor E aus L und einen $(r+1)$ -dimensionalen Teilraum V von $H^0(C, \mathcal{O}_C(E))$ mit $L = \{\text{div}(s) \mid s \in V, s \neq 0\}$. Bezeichnet $v_P(s)$ die Nullstellenordnung eines Schnittes $s \in V$ in einem Punkt P von C ,

so sind für jeden Punkt P auf C die folgenden Aussagen äquivalent :

(i) Für manche $D \in L$ gilt : $(r+1).P \leq D$

(ii) Für manche $s \in V$, $s \neq 0$ gilt : $v_P(s) \geq r+1$.

Wird nun das Geradenbündel des Divisors E durch einen Kozykel $(\varphi_{\alpha\beta})$ bzgl. einer Überdeckung (U_α) von C mit lokalen Parametern z_α definiert, so wird jeder Schnitt $s \in V$ durch eine Familie (s_α) regulärer Funktionen auf U_α definiert, wobei für jedes α, β gilt :

$$s_\alpha = \varphi_{\alpha\beta} s_\beta \quad \text{auf } U_\alpha \cap U_\beta .$$

Ist $P \in U_\alpha$, so folgt : $v_P(s) = v_P(s_\alpha)$, i.e. im Fall $\text{char}(k) = 0$:

$$v_P(s) \geq r+1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Für alle } i \text{ mit } 0 \leq i \leq r \text{ gilt: } \frac{d^i s_\alpha}{dz_\alpha^i}(P) = 0 .$$

Ist also $(s_j)_{0 \leq j \leq r}$ eine Basis von V und definiert für jedes j mit $0 \leq j \leq r$ die Familie $(s_{j\alpha})$ den Schnitt s_j aus V , so ist für jedes $P \in U_\alpha$ (ii) offenbar äquivalent zu :

(iii) Das Gleichungssystem

$$\sum_{0 \leq j \leq r} x_j \frac{d^i s_{j\alpha}}{dz_\alpha^i}(P) = 0 \quad (0 \leq i \leq r)$$

hat eine nicht triviale Lösung ,

bzw. - wenn w_α die Wronskideterminante $|\frac{d^i s_{j\alpha}}{dz_\alpha^i}|$ bezeichnet - zu $0 \leq i, j \leq r$

(iv) $w_\alpha(P) = 0$.

Mit Hilfe der Ketten- und Produktregel für Ableitungen beweist man aber leicht, daß für jedes α, β gilt :

$$w_\alpha = \varphi_{\alpha\beta}^{r+1} \left(\frac{dz_\beta}{dz_\alpha} \right)^{\binom{r+1}{2}} w_\beta \quad \text{auf } U_\alpha \cap U_\beta ,$$

d.h. die Familie (w_α) definiert eine globalen Schnitt w von

$$\mathcal{O}_C(E)^{\otimes (r+1)} \otimes \mathcal{O}_C^{\otimes \binom{r+1}{2}},$$

wobei $\mathcal{O}_C$ die Cotangentialgarbe auf C bezeichnet. Insbesondere ist also der Divisor $\text{div}(w)$ linear äquivalent zu dem Divisor $(r+1).E + \binom{r+1}{2}.K$, wobei K einen kanonischen Divisor auf C bezeichnet.

Dies ist aber der obige Satz von Severi; nach dem vorher gezeigten ist $\text{div}(w)$ offenbar der 'Divisor der $(r+1)$ -fachen Punkte von L '. .

Insbesondere zeigt dies, daß im Fall $\text{char}(k) = 0$ nur endlich viele positive Divisoren vom Grad n und Typ π in L enthalten sind.

Bekanntlich ist für $\text{char}(k) = 0$ ein Punkt P von C ein Weierstraßpunkt genau dann, wenn der Divisor $g.P$ in dem kanonischen System K auf C enthalten ist. Also zeigt das soeben Bewiesene, daß es in diesem Fall nur endlich viele Weierstraßpunkte gibt; für ihre Anzahl (mit Vielfachheiten) erhält man $(r=g-1, n=2g-2) : (g-1)g(g+1)$.

Darüberhinaus läßt sich zeigen, daß das Weierstraßgewicht eines Punktes P von C nichts anderes ist als die Vielfachheit des Punktes $g.P$ in dem Zyklus $\delta_g((g,1))K_g$ (vgl. hiermit [18]); dies liefert damit einen geometrischen Beweis dafür, daß $(g-1)g(g+1)$ die Summe der Weierstraßgewichte der Punkte der Kurve C ist.

Ferner ist bekannt, daß die obige Definition eines Weierstraßpunktes im Fall $\text{char}(k) > 0$ versagt: es gibt dann Kurven,

auf denen jeder Punkt Weierstraßpunkt in diesem Sinne ist (vgl. F. K. Schmidt : Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen II, Allgemeine Theorie der Weierstraßpunkte; Math. Zeit. 45 (1939) 75 - 96). Dies zeigt insbesondere, daß die eingangs gemachte Endlichkeitsvoraussetzung im Fall $\text{char}(k) > 0$ nicht überflüssig ist.

Wir haben weiter oben gezeigt, daß im Fall $\text{char}(k) = 0$ die Wronskideterminante eines linearen Systems L von der Dimension r ein globaler Schnitt der Garbe

$$\mathcal{O}_C(E)^{\otimes(r+1)} \otimes \Omega_C^{\otimes(r+1)}$$

ist, wobei E einen Divisor aus L bezeichnet; der Vollständigkeit halber erwähnen wir noch, wie sich dieses Ergebnis auf den Fall $\text{char}(k) > 0$ ausdehnen läßt, wenn dabei Wronskideterminanten im Sinne von F. K. Schmidt verwendet werden (F. K. Schmidt : Die Wronskische Determinante in beliebigen differenzierbaren Funktionenkörpern; Math. Zeit. 45 (1939) 62 - 74). Die gleichen Überlegungen wie oben zeigen dann nämlich, daß diese Wronskideterminante w eines linearen Systems L von der Dimension r ein globaler Schnitt der Garbe

$$\mathcal{O}_C(E)^{\otimes(r+1)} \otimes \Omega_C^{\otimes(r+1)} \otimes (\sum_1 \mu_1)$$

ist,

wobei E einen Divisor aus L bezeichnet und $0 < \mu_1 < \dots < \mu_s$ die Ordnungen der Wronskideterminante w sind (loc. cit.) . Speziell für das von F. K. Schmidt betrachtete kanonische System liefert diese Überlegung als Anzahl der Weierstraßpunkte (mit Vielfachheiten): $(2g-2)(g + \sum_1 \mu_1)$ (loc. cit.).

Weitere wichtige Spezialfälle der Formel von Brill - Segre erhält man für $r = 1$:

Ist z. B. $f: C \rightarrow \mathbb{P}_1$ ein separabler Morphismus vom Grad n , so hat f nur endlich viele Verzweigungspunkte; diesen Punkten entsprechen gerade die Divisoren vom Typ $((2,1),(1,n-2))$, die in dem zu f assoziierten linearen System L enthalten sind. Die Formel von Brill - Segre liefert für ihre Anzahl (mit Vielfachheiten) : $2(n+g-1)$, also die Riemannsche Geschlechtsformel.

Ein weiterer Spezialfall ist die Klasse einer glatten ebenen Kurve C , d.i. die Anzahl (mit Vielfachheiten) der Tangenten von einem allgemein gewählten Punkt der Ebene an die Kurve C . Die Formel von Brill - Segre bzw. die Riemannsche Geschlechtsformel (es gibt immer separable Projektionen $C \rightarrow \mathbb{P}_1$) liefert also für die Klasse γ einer ebenen glatten Kurve vom Grad n : $\gamma = n(n-1)$; das Geschlecht einer ebenen glatten Kurve von der Ordnung n ist bekanntlich $\binom{n-1}{2}$.

(2) Paare von Punkten, die zwei eindimensionalen linearen Systemen auf der Kurve C gemeinsam sind (vgl. [0], Vol. VI, S.11)

Sei L ein lineares System vom Grad n und der Dimension 1 und L' ein lineares System von der Dimension 1 und dem Grad m auf der Kurve C . Gibt es dann nur endlich viele positive Divisoren vom Grad 2, die L und L' gemeinsam sind, so ist

$$\deg(L_2 L'_2) = (n-1)(m-1) - g$$

deren Anzahl (mit Vielfachheiten) .

$$\begin{aligned}
 & \text{Nach Korollar 2 gilt nämlich } \deg(L_2 L'_2) = \\
 & = (1+X_1+X_2)^g (1+X_1)^{n-1-g} (1+X_2)^{m-1-g} \quad] \quad X_1 X_2 \\
 & = \left(\sum_{i \geq 0} \binom{g}{i} (X_1+X_2)^i \right) (1+X_1)^{n-1-g} (1+X_2)^{m-1-g} \quad] \quad X_1 X_2 \\
 & = (n-1-g)(m-1-g) + g(m-1-g) + g(n-1-g) + \binom{g}{2} \cdot 2 \\
 & = (n-1)(m-1) - g
 \end{aligned}$$

Dies kann man z.B. zum Beweis des folgenden Satzes über hyperelliptische Kurven heranziehen :

Ist $f: C \rightarrow \mathbb{P}_1$ ein Morphismus vom Grad 2 und $h: C \rightarrow \mathbb{P}_1$ ein Morphismus vom Grad n mit $2 \leq n \leq g$, so ist h eine rationale Funktion von f ; insbesondere ist also n gerade.

Ist nämlich L bzw. L' das zu f bzw. h assoziierte lineare System, so gilt nach der eben bewiesenen Formel

$$\deg(L_2 L'_2) < 0 \quad .$$

Also ist jeder Divisor von L in L' enthalten; dies hat zur Folge, daß der Morphismus h über f faktorisiert, und das wurde behauptet.

(3) r-fache Tangentialhyperebenen einer in einem projektiven Raum der Dimension r eingebetteten glatten Kurve

Ist C eine in einem projektiven Raum $\mathbb{P}_r$ eingebettete glatte Kurve vom Grad n , so bilden die Divisoren auf C , die durch Hyperebenen herausgeschnitten werden, ein lineares System L auf der Kurve C vom Grad n und der Dimension r ; für $n \geq 2r$

werden genau die Divisoren vom Grad n und Typ $\pi := ((2,r), (1,n-2r))$ durch r -fache Tangentialhyperebenen herausgeschnitten. Gibt es also nur endlich viele r -fache Tangentialhyperebenen an die Kurve C , so ist

$$\deg(\delta_n(\pi)L_n) = 2^r \sum_{0 \leq i \leq r} \binom{g}{i} \binom{n-r-i}{r-i}$$

deren Anzahl (mit Vielfachheiten).

Nach Korollar 1 erhält man :

$$\begin{aligned} \deg(\delta_n(\pi)L_n) &= \\ &= (1 + 4Y_1 + Y_2)^g (1 + 2Y_1 + Y_2)^{n-r-g} \sum Y_1^r Y_2^{n-2r} \\ &= \left(\sum_{i \geq 0} \binom{g}{i} 4^i Y_1^i (1+Y_2)^{g-i} \right) \left(\sum_{j \geq 0} \binom{n-r-g}{j} Y_1^j (1+Y_2)^{n-r-g-j} \right) \sum Y_1^r Y_2^{n-2r} \\ &= \sum_{i \geq 0} \binom{g}{i} 4^i \binom{n-r-g}{r-i} 2^{r-i} \\ &= 2^r \sum_{0 \leq i \leq r} 2^i \binom{g}{i} \binom{n-r-g}{r-i} \\ &= 2^r (1 + 2X)^g (1 + X)^{n-r-g} \sum X^r \\ &= 2^r (1 + X + X)^g (1 + X)^{n-r-g} \sum X^r \\ &= 2^r \sum_{i \geq 0} \binom{g}{i} X^i (1 + X)^{n-r-i} \sum X^r \\ &= 2^r \sum_{i \geq 0} \binom{g}{i} \binom{n-r-i}{r-i} \end{aligned}$$

Eine glatte ebene Kurve besitzt nur endlich viele Doppeltangenten (vgl. C.-H. Keller, Vorlesungen über Algebraische Geometrie, Leipzig 1974, S. 214); ihre Anzahl ist nach der obigen Formel $2(n-2)(n-3) + 4g(n-3) + 2g(g-1) = \frac{n}{2}(n-2)(n^2-9)$.

Aber schon bei Raumkurven gibt es Beispiele mit unendlich vielen dreifachen Tangenten (vgl. [0], Vol. VI, S. 43).

Sei S ein algebraisches System positiver Divisoren auf C von der Dimension 1 und vom Grad m . Dann ist die Menge der positiven Divisoren vom Grad m , die in S enthalten sind, eine Kurve auf der Mannigfaltigkeit Div_m ; ihre Klasse in $A(\text{Div}_m)$ sei γ_m . Dann heißt $\deg(\varphi_m \gamma_m)$ Index von S ('Anzahl der aus m Punkten bestehenden Punktgruppen aus S , die einen allgemein auf der Kurve gegebenen Punkt enthalten'; vgl. R_2). Weiter heißt jeder in S enthaltene Divisor vom Grad m und Typ $((2,1),(1,m-2))$ Doppelpunkt von S ; die Anzahl der Doppelpunkte von S ist also $\deg(\delta_m \gamma_m)$.

Satz 7 Formel von Schubert

Es sei S ein algebraisches System positiver Divisoren vom Grad m , Index i , Dimension 1, mit d Doppelpunkten und L ein lineares System vom Grad l und der Dimension r auf der Kurve C . Gibt es dann nur endlich viele positive Divisoren vom Grad $r+1$, die S und L gemeinsam sind, so ist

$$\alpha := li \binom{m-1}{r} - \frac{1}{2} d \binom{m-2}{r-1}$$

deren Anzahl (mit Vielfachheiten, d.h. $\alpha = \deg(L_{r+1} \gamma_{r+1})$), wobei γ_{r+1} die Klasse der Kurve

$\{D | D \in \text{Div}_{r+1}, \text{ für manche } D' \in S \text{ gilt : } D \leq D'\}$
in $A(\text{Div}_{r+1})$ ist).

Beweis:

Sei $n := r+1$; es gilt :

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{0 \leq j \leq 1} \binom{1-n+1-g}{1-j} \varphi_n^{1-j} f_n^* \gamma_L^*(\mu_j) && (\text{Satz 5}) \\ &\equiv (1-n+1-g) \varphi_n + f_n^*(\mu_1) && (\text{nach dem Satz vom Quadrat}) \\ &&& \text{gilt: } \gamma_L^*(\mu_j) \equiv \mu_j) \\ &\equiv l \varphi_n - \frac{1}{2} \delta_n && (\text{Lemma 8}) \end{aligned}$$

Deshalb folgt :

$$\alpha = \deg(L_n \gamma_n) = l \deg(\varphi_n \gamma_n) - \frac{1}{2} \deg(\delta_n \gamma_n) .$$

Nun gilt aber aufgrund der Definitionen

$$\deg(\varphi_n \gamma_n) = i \binom{m-1}{n-1}$$

$$\text{und} \quad \deg(\delta_n \gamma_n) = d \binom{m-2}{n-2}$$

und dies beweist die Behauptung.

Im Beispiel (2) , S. 53, kann man natürlich an Stelle von Korollar 2 den Satz 7 anwenden :

Ein lineares System L' auf der Kurve C von der Dimension 1 und vom Grad m hat den Index 1 ; denn nach Satz 5 gilt :

$$\begin{aligned} \deg(\varphi_m L'_m) &= \deg(\varphi_m \sum_{0 \leq j \leq m-1} \binom{m-1-g}{m-1-j} \varphi_m^{m-1-j} f_m \gamma_L(\mu_j)) \\ &= \sum_{0 \leq j \leq m-1} \binom{m-1-g}{m-1-j} \binom{g}{j} && (R_3, R_4) \\ &= \binom{m-1}{m-1} = 1 . \end{aligned}$$

Ist ferner L ein lineares System vom Grad n und der Dimension 1 auf der Kurve C , folgt nach Satz 7 und Beispiel (1) :

$$\begin{aligned} \deg(L_2 L'_2) &= n \binom{m-1}{1} - \frac{1}{2} (2(m+g-1)) \binom{m-2}{0} \\ &= (n-1)(m-1) - g \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit der in Beispiel 2 durchgeführten Berechnung nach Korollar 2 .

Literatur:

- [0] Baker, H. F.
Principles of Geometry
Cambridge 1933
- [1] Borel, A.; Serre, J. P.
Le théorème de Riemann-Roch
Bull. math. Soc. France 86 (1958) 97-136
- [2] Brill, A.; Noether, M.
Über die algebraischen Functionen und ihre Anwendungen in
der Geometrie
Math. Ann. 7 (1874) 269-310
- [3] Grothendieck, A.; Dieudonné, J.
Eléments de Géométrie Algébrique
I.H.E.S. Publ. math. 4, 8, ...
- [4] -- ; --
Eléments de Géométrie Algébrique I
Springer 1971
- [5] --
Les schémas de Hilbert
Fondements de la Géométrie Algébrique 221, Paris 1962
- [6] --
Les schémas de Picard
Fondements de la Géométrie Algébrique 232, 236, Paris 1962

- [7] --
Sur quelques propriétés fondamentales en théorie des intersections
Anneaux de Chow et applications, Sem. Chevalley 2 (1958) 4
- [8] Gunning, R. C.
Lectures on Riemann surfaces - Jacobi varieties
Princeton 1972
- [9] Hirzebruch, F.
Topological methods in algebraic geometry
New York 1966
- [10] Iversen, B.
Linear determinants with applications to the Picard scheme
of a family of algebraic curves
Lecture notes 174 (Springer) 1971
- [11] Kempf, G.
Schubert methods with an application to algebraic curves
Publ. Math. Centrum Amsteden 1971
- [12] Kleiman, S. L.; Laksov, D.
On the existence of special divisors
Amer. J. Math. 94 (1972) 153-162
- [13] -- ; --
Another proof of the existence of special divisors
Acta Math. Scand. 132 (1973) 163-176
- [14] Lang, S.
Abelian varieties
New York 1959

[15] Macdonald, I. G.

Some enumerative formulae for algebraic curves

Proc. Cambr. Phil. Soc. 54 (1958) 399-416

[16] --

Symmetric products of an algebraic curve

Topology 1 (1962) 319-343

[17] Martens, H.

On the varieties of special divisors on a curve

J. reine angew. Math. 227 (1967) 111-120

[18] Mattuck, A.

On symmetric products of curves

Proc. A. M. S. 13 (1962) 82-87

[19] --

Symmetric products and Jacobians

Amer. J. Math. 83 (1961) 189-206

[20] --

Secant bundles on symmetric products

Amer. J. Math. 87 (1965) 779-797

[21] Meis, T.

Die minimale Blätterzahl der konkretisierung einer kompakten
Riemannschen Fläche

Schr. Math. Inst. Münster 1960

[22] Porteous, I. R.

Simple singularities of maps

Lecture notes 192 (Springer) 1971

[23] Schwarzenberger, R. L. E.

Jacobians and symmetric products

Ill. J. Math. 7 (1963) 257-268

[24] --

The secant bundle of a projective variety

Proc. London Math. Soc. 14 (1964) 369-384

[25] Severi, F.

Vorlesungen über algebraische Geometrie

Leipzig 1921

[26] Weil, A.

Courbes algébriques et variétés abéliennes

Paris 1971

[27] Zeuthen, H. G.

Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie

Leipzig 1914

Lebenslauf

- 1949 am 5.11.49 als Sohn der Eheleute Hermann und Rosa Angermüller, geb. Ehrsam, in Coburg geboren
- 1956-1960 Besuch der Volksschule in Großheirath bei Coburg und in Coburg
- 1960-1969 Besuch des naturwissenschaftlich-mathematischen Gymnasiums in Coburg
- 1969-1974 nach dem Abitur Studium der Mathematik an der Universität Erlangen-Nürnberg, dazwischen
- 1971 Vordiplom und
- 1974 Diplom in Mathematik
- 1974-1975 von Februar 74 bis Mai 75 Tätigkeit als Tutor am Mathematischen Institut in Erlangen; gleichzeitig Stipendiat nach dem Graduiertenförderungsgesetz.
- Seit Juli 75 Verwalter einer Assistentenstelle am Mathematischen Institut in Erlangen.
- Seit 1973 bin ich verheiratet mit Annemarie Angermüller, geb. Fuchs; wir haben ein Kind .

Copy - Center 2000

852 ERLANGEN · Obere Karlstr. 30
Tel. 09131-26197